

פונקציות לא מוגדרות (בנקודה)

ראינו כי בגבולות ובגזירה אנו משאיפים את $\Delta x \rightarrow 0$

אם יש לנו פונקציה מסוג שבר $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$

אם ייוצר מצב שכאשר נשאיף את $x \rightarrow a$ (מספר כלשהוא), המונה או המכנה או שניהם יהיו אפס ואז אנו אומרים כי הפונקציה לא מוגדרת בנקודה.

מתי הפונקציה לא תהיה מוגדרת בנקודה? כאשר נקבל $\frac{0}{0}$ או $\frac{\infty}{\infty}$

או שילוב כמו $0 * \infty$

אנו נסתכל על פונקציה מסוג $\frac{0}{0}$

לדוגמא: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 81}{x - 3}$

כאן המונה והמכנה מתאפסים ב $x = 3$.

כאן $u(x) = x^4 - 81$ | $v(x) = x - 3$

לגבי סוג זה קיים כלל הנקרא כלל לופיטל (שאנו רק נשתמש בו ולא נוכיח אותו) האומר שאם שתי הפונקציות גזירות והגבול של u ושל v

הוא אפס בנקודת השאיפה אז $\lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{u'(x)}{v'(x)}$

הגבול של הפונקציה שווה לגבול של הנגזרות.

בדוגמא שלנו $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 81}{x - 3} =$

נגזור מונה ומכנה ונקבל $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^3}{1} = 108$

דוגמאות

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - x^2 - 4x + 3}{x^3 - 2x^2 + x} \quad 1. \text{ מצא גבול של}$$

אנו רואים שזה מסוג $\frac{0}{0}$ לכן לפי כלל לופיטל נגזור

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x^2 - 2x - 4}{3x^2 - 4x + 1} \quad \frac{0}{0} \text{ גם זה מסוג}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{12x - 2}{6x - 4} = 5 \quad \text{לכן שוב מותר לגזור}$$

אם נציב כאן $x \rightarrow 1$ נקבל 5 ולא $\frac{0}{0}$ כאן נגמר תהליך לופיטל.

אם היינו ממשיכים בגזירה היינו מקבלים שהגבול 2 וזה לא נכון.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - x^2 - 4x + 3}{x^3 - 2x^2 + x} = 5 \quad \text{לכן הגבול של}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\cos 2x - 1} \quad 2. \text{ מצא גבול של}$$

זה גם מסוג $\frac{0}{0}$ לכן מותר להשתמש בכלל לופיטל

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{-2 \sin 2x} = \frac{\cos x}{4 \cos 2x} = \frac{1}{4}$$

נקודות סינגולריות

אנו ראינו פונקציה מסוג $\frac{0}{0}$ וכן פונקציות אשר אינן מוגדרות

בנקודה.

נקודה סינגולרית היא נקודה שבה הנגזרת $\frac{dy}{dx}$ לא מוגדרת והיא מסוג

$$\frac{0}{0}.$$

אם יש לנו פונקציה $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$

$$f'(x) = \frac{u'(x) * v(x) - v'(x) * u(x)}{v^2(x)}$$

יש לנו מונה ומכנה . נכתוב זאת $f' = \frac{g(x)}{h(x)}$

המונה $g(x) = u'(x) * v(x) - v'(x) * u(x)$ והמכנה $h(x) = v^2(x)$

הנקודות הסינגולריות יתקבלו כאשר $g(x) = 0$ | $h(x) = 0$ מבלי לצמצם שום גורם משותף.

ישנם מקרים שנקודה מקיימת את הפונקציה ואילו כל סביבתה אינה מקיימת את הפונקציה (מקבלים ערכים מדומים), נקודה זו היא נקודה סינגולרית מבודדת.

לדוגמא

1. הפונקציה $y^2(x^2 - 4) = x^4$

בראשית (0,0) יש נקודה סינגולרית מבודדת .

הנקודה מקיימת את הפונקציה ואילו סביבתה לא. בדוק!

תחום הקיום של הפונקציה הוא $-2 > x > 2$

הראשית לא שייכת לתחום אבל היא מקיימת את המשוואה (הפונקציה).

2. הפונקציה $y^2(1+x) = x^2(1-x) = -x^3 + x^2$

נגזור $2yy'(1+x) + y^2 = -3x^2 + 2x$

$$y' = \frac{-3x^2 - y^2 + 2x}{2y(1+x)}$$

נשווה את המונה והמכנה לאפס

$$y^2 = -3x^2 + 2x \quad \text{המונה}$$

$$2y(1+x) = 0 \quad \text{המכנה}$$

נפתור את שתי המשוואות ממשוואה 2 נקבל $y=0$ או $x=-1$

נציב במשוואה הראשונה ונקבל שכאשר $y=0$ גם $x=0$.

וכאשר $x=-1$ אז $y=\sqrt{-5}$.

רק הנקודה $(0;0)$ מקיימת את הפונקציה ולכן היא נקודה סינגולרית.