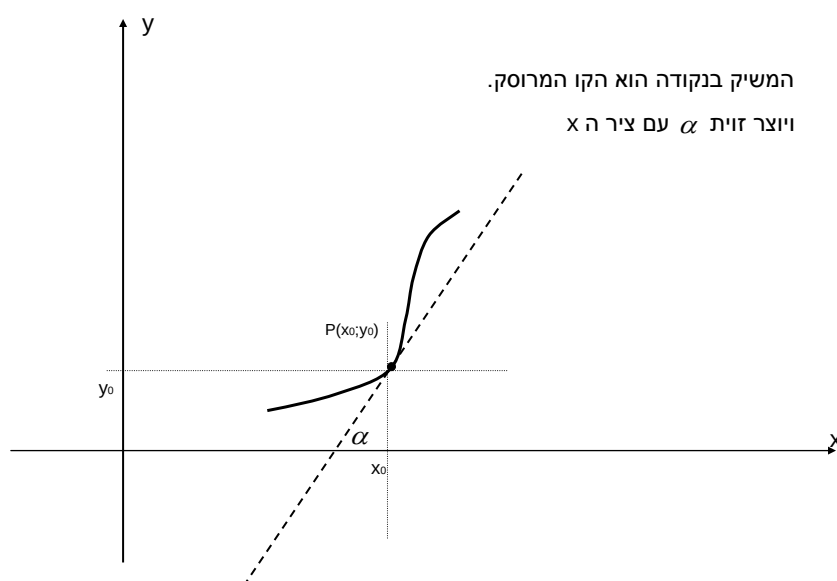


משיקים ונורמלים

אם לפונקציה $f(x)$ יש נגזרת בנקודה $P(x_0; y_0)$ אזי לעקום יש משיק בנקודה זו. המשיק הוא קו ישר אשר ניתן לתיאור באמצעות

$$y = mx + k$$

או $y - y_0 = m(x - x_0)$ כאשר m זו הנגזרת בנקודה ההשקה.



אם נגזור את $f(x) = y$ נקבל את $f'(x) = y'$ ובנקודת ההשקה שיפוע המשיק זהה בדיוק לשיפוע הפונקציה ולכן $f'(x_0) = m$ אם נציב זאת בישר המשיק נקבל את משוואת הישר

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

את ערכי הנקודה יש לנו וכן את הנגזרת בנקודה ומהן נקבל את הישר.

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

דוגמא:

נתונה הפונקציה $y = x^2 - 3x + 4$

מצא את המשיק בנקודות $P_1(0;4)$ ו $P_2(3;4)$.

$$y = x^2 - 3x + 4$$

$$y' = 2x - 3$$

נחשב את הנגזרת

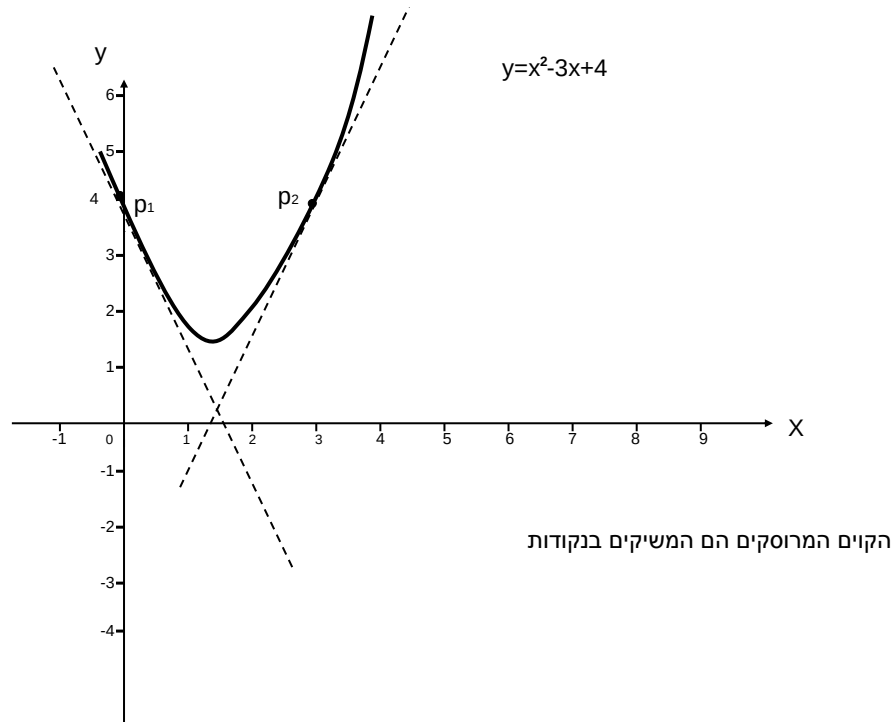
$$m_1 = 2 \cdot 0 - 3 = -3$$

נציב את הנקודות בנקודה $P_1(0;4)$ נקבל

$$m_2 = 2 \cdot 3 - 3 = +3$$

ובנקודה $P_2(3;4)$ נקבל

נצייר את הגרף



נכתוב את משוואת המשיק ל $P_1(0;4)$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 4 = -3(x - 0)$$

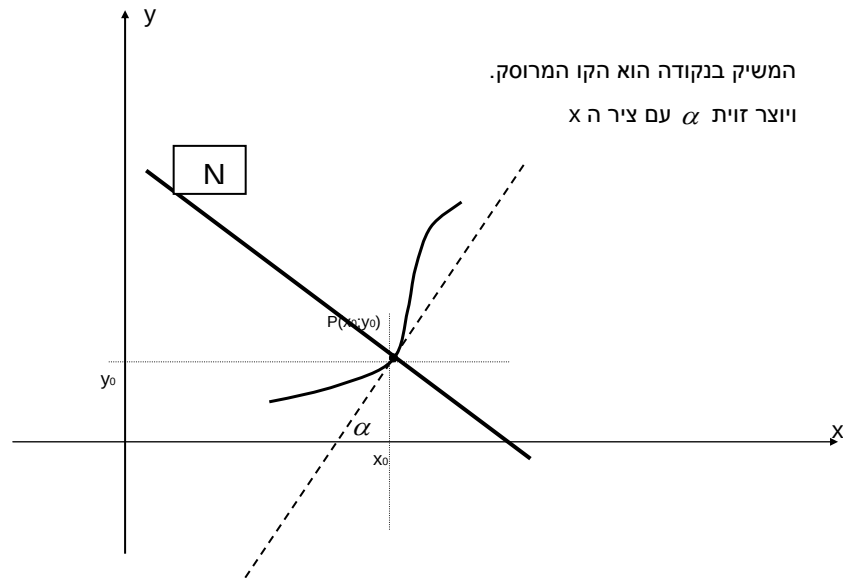
$$y = -3x + 4$$

והמשיק לנקודה $P_2(3;4)$

$$y - 4 = +3(x - 3)$$

$$y = 3x - 5$$

הנורמל הוא הישר המאונך למשיק בנקודת ההשקה.



הנורמל מסומן ב N . אנו יודעים את שיפוע המשיק m ומכאן שיפוע הנורמל יהיה $-\frac{1}{m}$ ומשוואת הנורמל העובר בנקודת ההשקה תהיה

$$y - y_0 = -\frac{1}{m}(x - x_0)$$

אם נציב בדוגמא שלנו נקבל את משוואת הנורמל

$$y - 4 = -\frac{1}{-3}(x - 0) =$$

$$y = \frac{1}{3}x + 4$$

$$x - 3y + 12 = 0$$

או

בנקודה $p_1(0;4)$

ובנקודה $P_2(3;4)$

$$y - 4 = -\frac{1}{+3}(x - 3) =$$

$$y - 4 = -\frac{1}{3}x + 1$$

$$x + 3y - 15 = 0$$

תרגיל

1. נתונה הפונקציה $y = x^3 - 2x^2 + 4$ מצא את המשיק ואת הנורמל

בנקודה $P(2;4)$.

נגזור את הפונקציה $y' = 3x^2 - 4x$ נציב את ערכי הנקודה ונקבל

$$y' = 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 = +4$$

נמצא את משוואת המשיק בנקודה

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 4 = 4(x - 2)$$

$$4x - y - 4 = 0$$

ועכשיו משוואת הנורמל בנקודה

$$y - y_0 = -\frac{1}{m}(x - x_0)$$

$$y - 4 = -\frac{1}{4}(x - 2)$$

$$4y + x - 18 = 0$$

2. באיזו נקודה של הפונקציה $y = x^2 + 5$ המשיק

א. מקביל לישר $12x - y = 17$.

ב. מאונך לישר $x + 3y = 2$.

א. נגזור את הישר $12 - y' = 0$ ומכאן $y' = 12$

נגזור את הפונקציה $y' = 2x$ השיפוע של הישר המקביל ושל

$$2x = 12$$

$$x = 6$$

הפונקציה בנקודת ההשקה זהים ולכן

נציב את ה x שקבלנו במשוואת הפונקציה $y = 6^2 + 5 = 41$

נקודת ההשקה היא : $P(6;41)$

ומשוואת המשיק בנקודת ההשקה

$$y - 41 = 12(x - 6)$$

$$y - 12x + 31 = 0$$

$$y - 41 = -\frac{1}{12}(x - 6)$$

$$12y - 492 = -x + 6$$

$$12y + x - 498 = 0$$

ומשוואת הנורמל תהיה

ב. בכדי למצוא ישר מאונך לישר הנתון

$$y' = -\frac{1}{3}$$

נמצא את השיפוע (y') של הישר $x + 3y = 2$

$$y' = 3$$

ושיפוע המאונך לו יהיה

השיפוע של הישר המשיק ושל הפונקציה בנקודת ההשקה זהים

$$y' = 2x = 3$$

$$x = 1.5$$

ולכן נגזרת הפונקציה $y' = 2x$ שווה לשיפוע הישר

נציב את ה x שקבלנו במשוואת הפונקציה $y = x^2 + 5 = 1.5^2 + 5$

נקודת ההשקה היא : $P(1.5;7.25)$

$$y - 7.25 = 3(x - 1.5)$$

$$3x - y - 2.75 = 0$$

ומשוואת המשיק בנקודת ההשקה