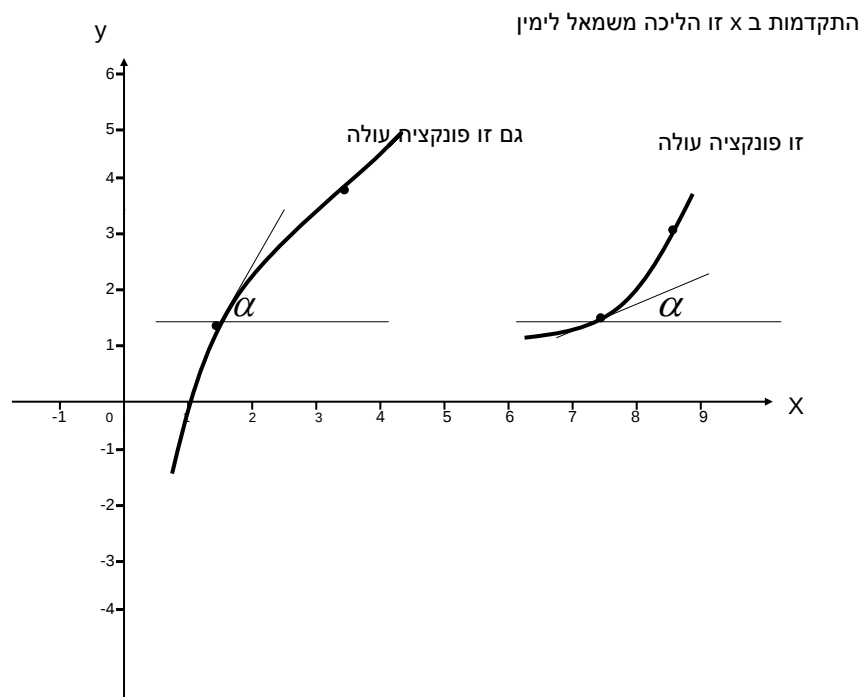


מקסימום ומינימום

כאשר אנו מסתכלים על פונקציה y , $y = f(x)$, y הוא המשתנה התלוי ב- x . לכל ערך של x יש לפונקציה ערך המתאים לו. התקדמות של x הכוונה היא הגדלת ערך x , כלומר על ציר ה- x אנו מתקדמים בהליכה משמאל לימין.



ראינו פונקציה עולה ופונקציה יורדת:
אם נתקדם ב- x וערך הפונקציה y יעלה - נאמר שהפונקציה עולה.
ואם נתקדם ב- x וערך הפונקציה ירד - נאמר שהפונקציה יורדת.
אם נסתכל על גרף במישור x, y



אנו רואים כשהפונקציה עולה זווית המשיק היא חדה ולכן הנגזרת

בנקודת ההשקה $y' = \tan \alpha$ היא חיובית.

הזווית נמדדת ביחס לציר החיובי של ציר ה- x .

ההבדל בין שתי הפונקציות הוא שהפונקציה מימין היא קעורה

והפונקציה משמאל היא קמורה.

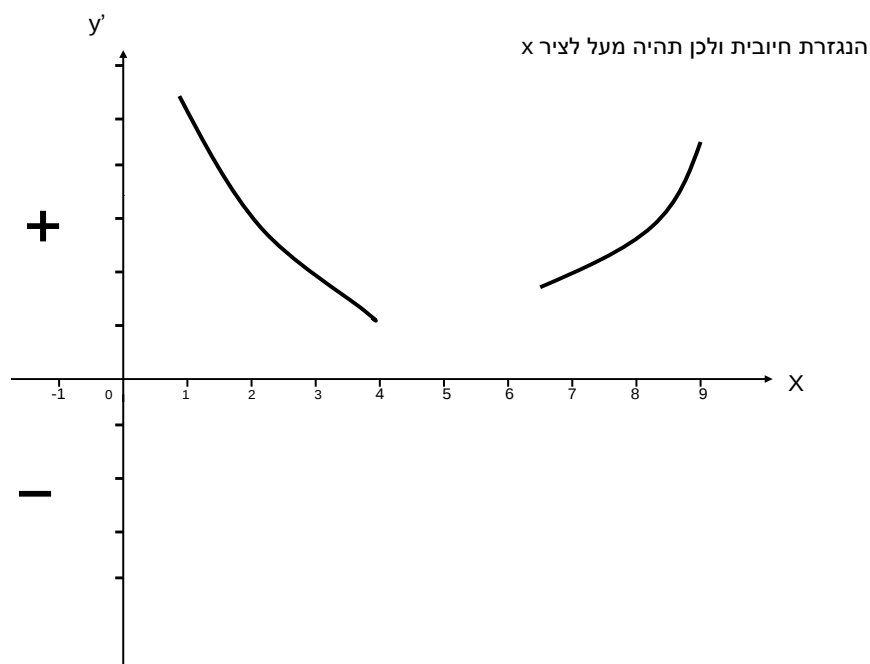
אנו אומרים שהפונקציה **קעורה** – כאשר המשיק בכל נקודה הוא

מתחת לעקומה, ופונקציה **קמורה** – כאשר המשיק בכל נקודה הוא

מעל הפונקציה.

נראה זאת ביתר פירוט בפרק הדן בעקמומיות הפונקציה להלן.

נראה כיצד תיראה הנגזרת של הפונקציות.



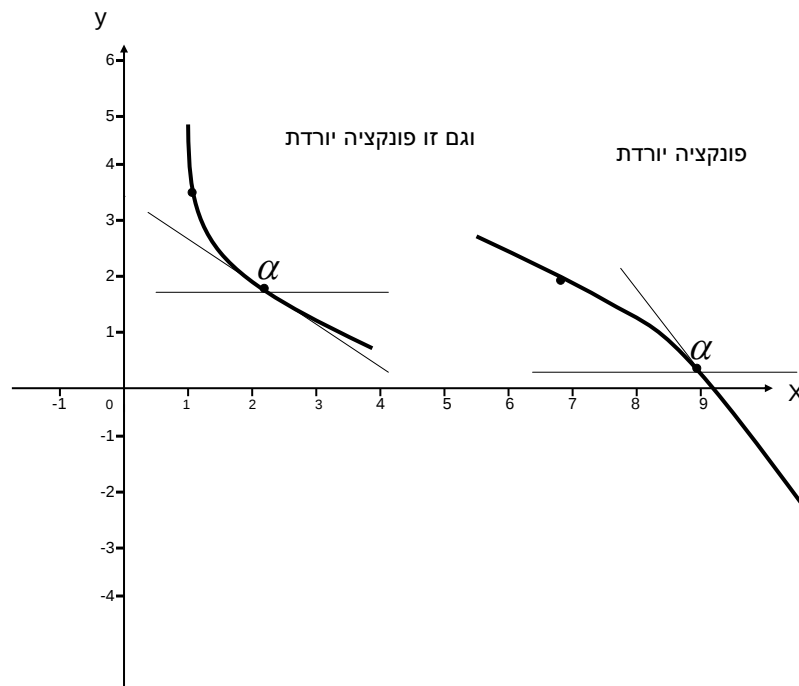
שתי הפונקציות הן פונקציות עולות.

באם הפונקציה עולה וקמורה (משמאל) **הנגזרת** תהיה פונקציה

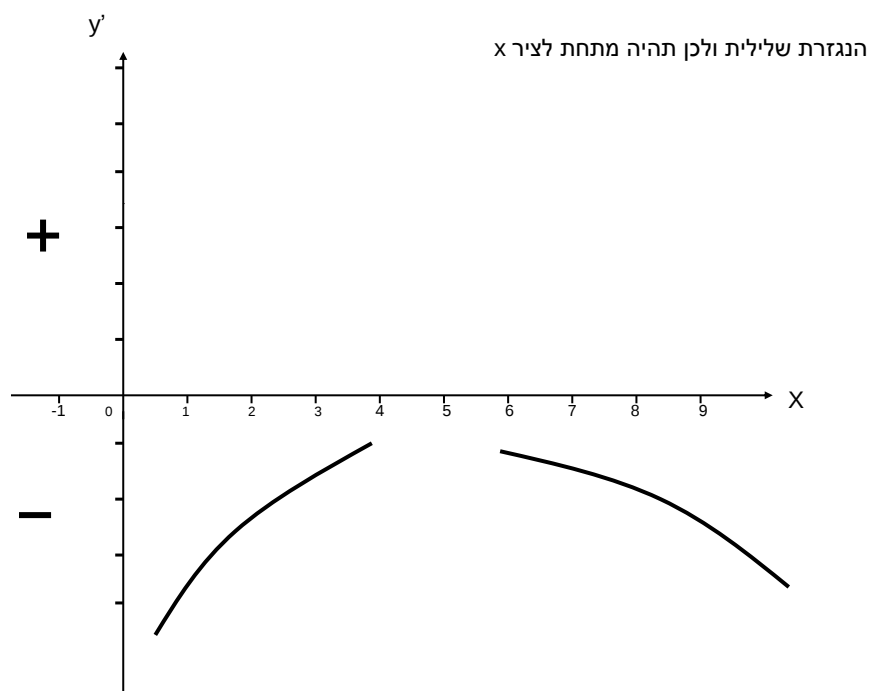
יורדת ואם הפונקציה עולה וקעורה (מימין) **הנגזרת** תהיה פונקציה

עולה.

ובאותו אופן לגבי פונקציה יורדת. נראה בגרפים:



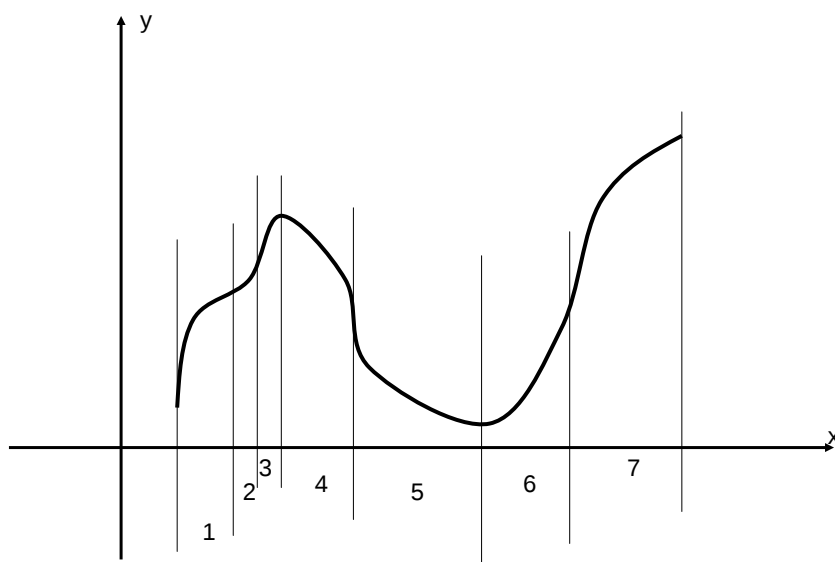
כאן שתי הפונקציות משמאל ומימין הן פונקציות יורדות.
 זווית המשיק היא זווית קהה ולכן הנגזרת בנקודה תהיה שלילית.
 מימין הפונקציה קמורה ומשמאל הפונקציה קעורה.
 נראה את הנגזרת:



כאן כאשר הפונקציה יורדת וקעורה הנגזרת היא פונקציה עולה -
משמאל, וכאשר הפונקציה יורדת וקמורה הנגזרת היא פונקציה יורדת - מימין.

מכאן אנו יכולים ללמוד על התנהגות הפונקציה והנגזרת בכל נקודה שהיא.

באופן כללי לפונקציה התנהגות מורכבת. בתחום מסוים זו פונקציה עולה בתחום אחר זו פונקציה יורדת ויתכן גם שאינה משתנה. פונקציה רציפה כללית תיראה כך:

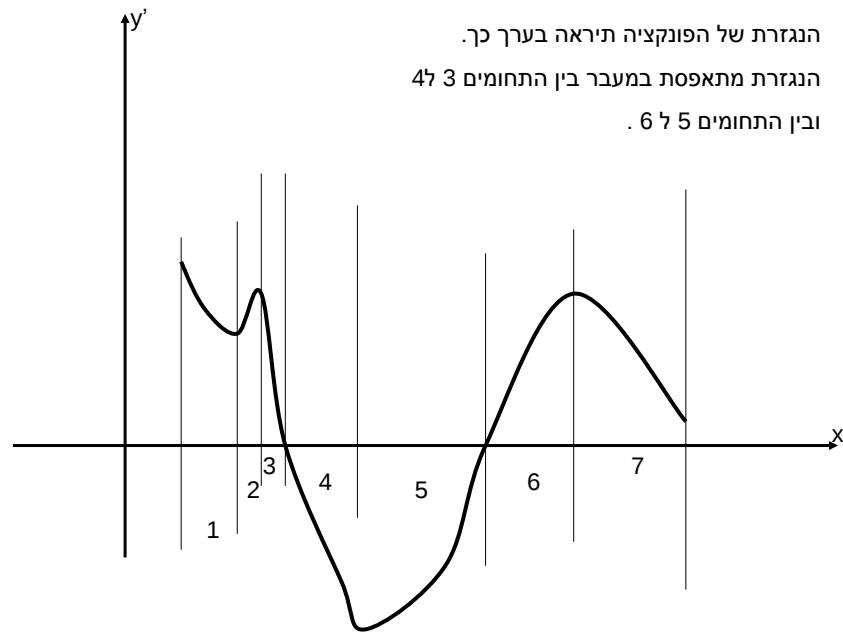


- תחום 1 הפונקציה עולה וקמורה הנגזרת תהיה חיובית ויורדת
- תחום 2 הפונקציה עולה וקעורה הנגזרת תהיה חיובית ועולה
- תחום 3 הפונקציה עולה וקמורה הנגזרת תהיה חיובית ויורדת
- תחום 4 הפונקציה יורדת וקמורה הנגזרת תהיה שלילית ויורדת
- תחום 5 הפונקציה יורדת וקעורה הנגזרת תהיה שלילית ועולה
- תחום 6 הפונקציה עולה וקעורה הנגזרת תהיה חיובית ועולה
- תחום 7 הפונקציה עולה וקמורה הנגזרת תהיה חיובית ויורדת.

נסתכל על תחומים 3 ו 4 מאחר והפונקציה רציפה והנגזרת הופכת מחיובית לשלילית הרי שבנקודה מסוימת, במעבר מתחום 3 לתחום 4, הנגזרת **חייבת** להתאפס. נקודת המעבר הזו היא בנקודה המכסימלית של הפונקציה בתחום (הסביבה) זה. באותו אופן אם נסתכל על תחומים 5 ו 6 הנגזרת שם עוברת משלילית לחיובית, גם כאן קיימת נקודת מעבר בה הנגזרת מתאפסת, ושם נמצאת הנקודה המינימלית של הפונקציה בסביבה (בתחום) זו.

בתחומים 3 ו 4 הפונקציה קמורה לכן יש לנו נקודת מכסימום, ואילו בתחומים 5 ו 6 הפונקציה קעורה ולכן יש לנו נקודת מינימום. אנו יכולים לראות זאת באופן הבא: בנקודות המכסימום והמינימום המשיק הוא מקביל לציר ה' x' ושם זווית ההשקה היא אפס וכמובן גם $y' = \tan \alpha = 0$.

אם נתונה לנו פונקציה נוכל למצוא את נקודות המינימום והמכסימום הסביבתיים על ידי שנגזור ונשווה את הנגזרת לאפס. (אנו יכולים גם למצוא נקודות אחרות לדוגמא כאשר המשיק הוא בזווית 45° ה' $y' = \tan 45^\circ = 1$ נגזור את הפונקציה ונמצא היכן הנגזרת שווה ל 1.) נראה כיצד תיראה הנגזרת הראשונה.



הערה: שימו לב שגם לפונקצית הנגזרת יש תחומים וניתן לאפיין אותה בדיוק כפי שעשינו לגבי פונקצית המקור. (נקודות קיצון וכד').

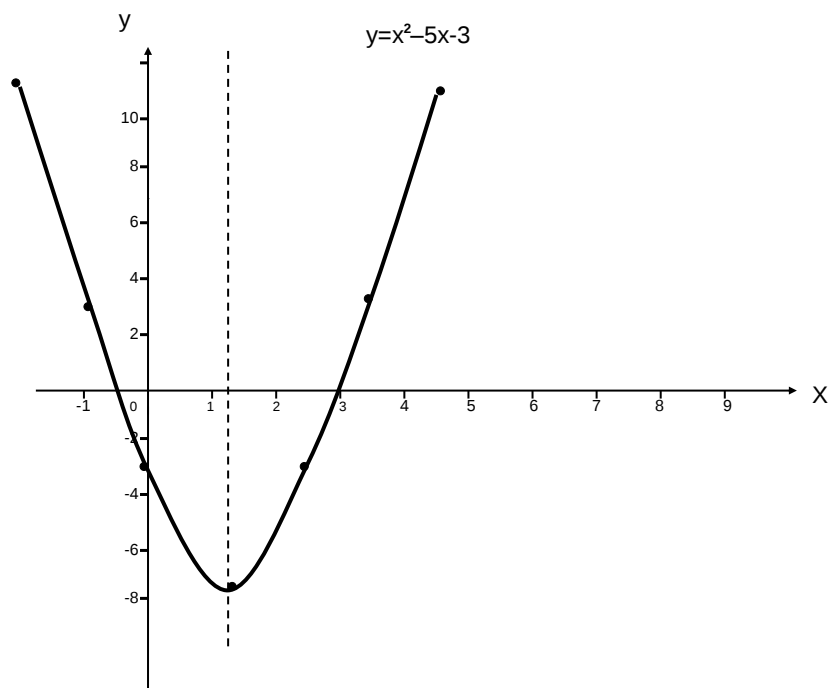
נראה דוגמא: נתונה הפונקציה $y = 2x^2 - 5x - 3$

מצא את נקודת הקיצון וצייר את גרף הפונקציה וגרף הנגזרת.

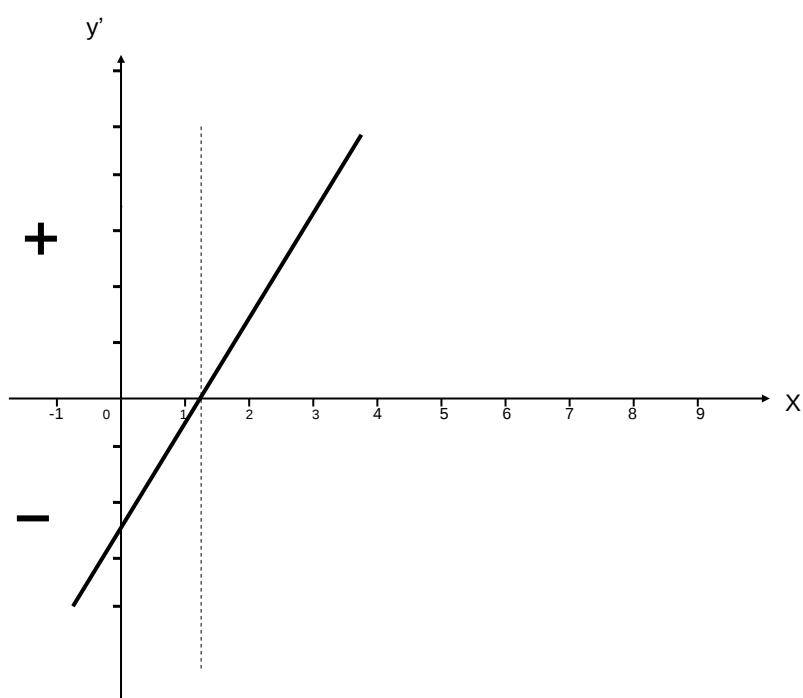
$$y' = 4x - 5 = 0$$

ראשית נגזור ונשווה לאפס

$$x = 1.25$$



והנגזרת תיראה כך



הפונקציה קעורה ולכן יש לה מינימום. נוכל לראות זאת בעזרת הנגזרת.

אם הנגזרת עוברת מ - ל + כמו אצלינו (הפונקציה עולה) הנקודה היא מינימום ואם הנגזרת עוברת מ + ל - (הפונקציה יורדת) והנקודה היא מקסימום.

הנגזרת גם היא פונקציה של x כפי שראינו בדוגמא $y' = 4x - 5$

ולכן אפשר להסתכל עליה כעל פונקציה שניתנת לגזירה.

אם נגזור את y' נקבל בעצם את הנגזרת השנייה של הפונקציה המקורית.

כפי שראינו אם הנגזרת עוברת מ - ל + אזי פונקצית הנגזרת היא פונקציה עולה ולכן הנגזרת של פונקצית הנגזרת היא השיפוע של פונקצית הנגזרת והיא זווית חדה (חיובי) זה אומר שהנגזרת השנייה היא חיובית.

בעזרת הנגזרת השנייה נוכל לדעת באם הנקודה היא מינימום או מקסימום.

כאשר נציב את הנקודה בנגזרת השנייה ונקבל תוצאה חיובית נדע שיש מינימום. אם נקבל בנקודה ערך שלילי (פונקצית הנגזרת יורדת) נקבל מקסימום.

במעברים בין התחומים לא חייב להיות מקסימום או מינימום. נראה זאת בפרק הבא הן בנקודות פיתול.

בדוגמא שלנו אם נגזור פעם נוספת נקבל : $y'' = 4$

קבלנו ערך חיובי ולכן יש לנו מינימום.

מתוך מה שראינו אנו יכולים לראות שיטה לדעת את התנהגות הפונקציה ולראות את הגרף של הפונקציה:

נגזור את הפונקציה המקורית ונשווה לאפס למציאת נקודות מכסימום ומינימום סביבתיים.

נבדוק בסביבת נקודות אלו מעבר של סימנים $+$ ל $-$ או $-$ ל $+$.

נגזור פעם שניה ונציב את הערכים הקיצוניים שמצאנו בגזירה הראשונה, ונבדוק באם התקבל ערך חיובי או שלילי, בהתאם נדע אם בנקודות אלו יש מינימום או מכסימום.

ניקח דוגמא: נתונה הפונקציה $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 8$

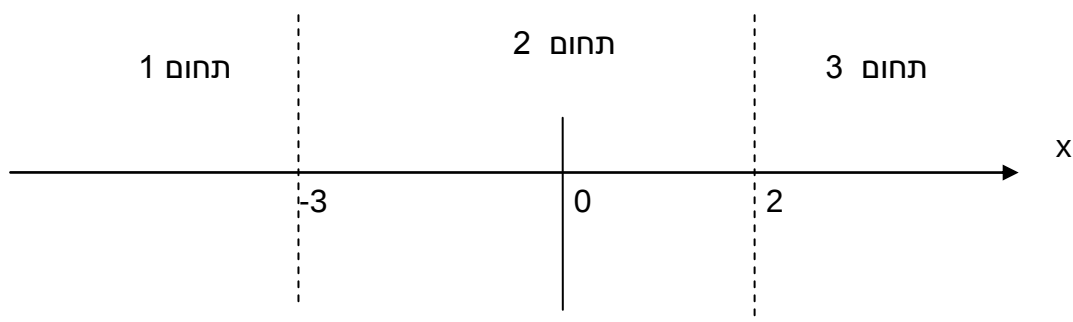
מצא את ערכי הנקודות הקריטיות וצייר את גרף פונקצית הנגזרת הראשונה וכיצד תיראה הפונקציה המקורית.

ראשית נגזור פעם ראשונה ונקבל $y' = x^2 + x - 6$

נשווה לאפס ונקבל $x^2 + x - 6 = 0$
 $(x + 3)(x - 2) = 0$

מכאן $x_2 = 2$ ו $x_1 = -3$

בנקודות אלו יש מכסימום או מינימום (או פיתול נראה בפרק הבא).



נציב את ה x ים שקבלנו בפונקציה למציאת ה y המתאים.

$$y_1 = \frac{1}{3} * (-3)^3 + \frac{1}{2} * (-3)^2 - 6 * (-3) + 8 = \frac{43}{2}$$

$$y_2 = \frac{1}{3} * 2^3 + \frac{1}{2} * 2^2 - 6 * 2 + 8 = \frac{2}{3}$$

כמו כן נמצא את ערך הפונקציה ב $x=0$ (נקודת החיתוך עם ציר y)

$$y_0 = 8$$

נציב במשוואה ונקבל

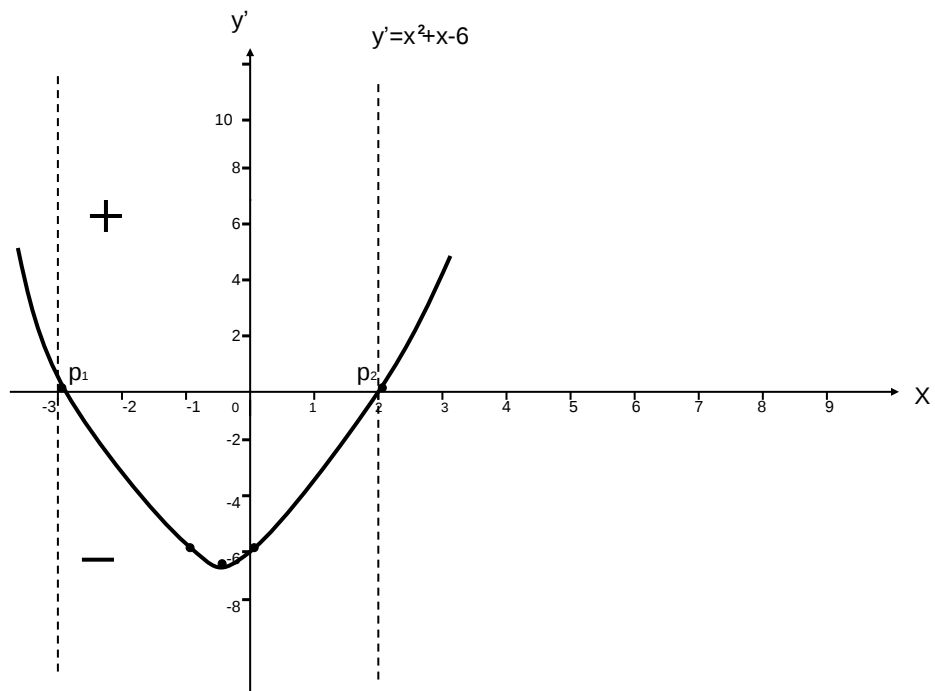
$$y' = x^2 + x - 6$$

נסתכל על פונקצית הנגזרת

$$y' = -6$$

בנקודה $x=0$ ה-

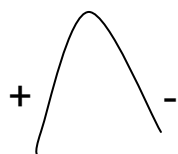
פונקצית הנגזרת היא פרבולה ותיראה



בנקודה p_1 פונקצית הנגזרת עוברת מ $+$ ל $-$ (פונקציה יורדת)

הנגזרת

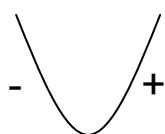
השניה בנקודה זו תהיה שלילית לכן שם יש מקסימום.



פונקציה קמורה

$$P_1(-3; \approx 22)$$

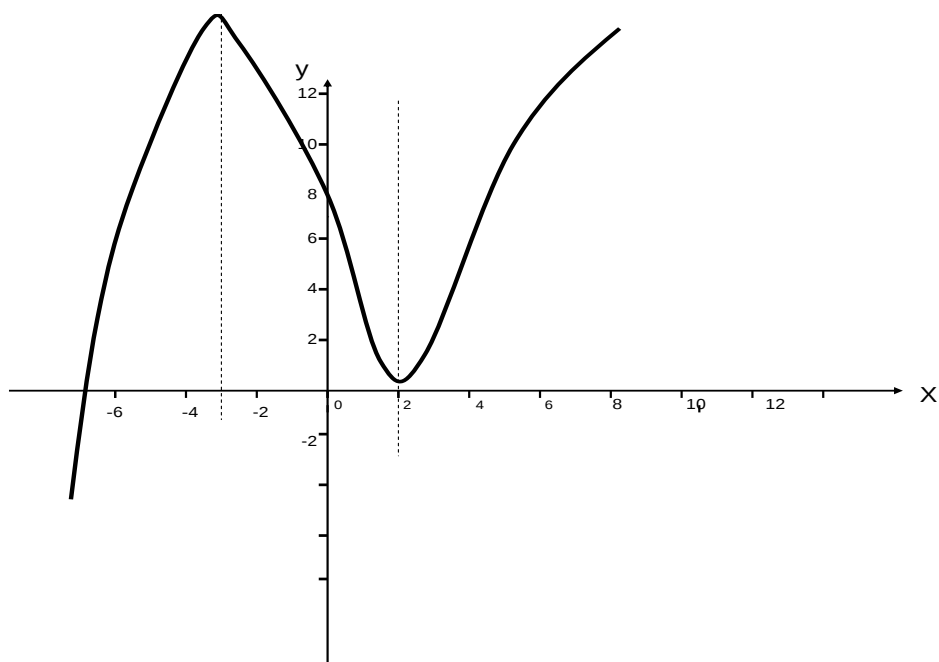
בנקודה x_2 פונקצית הנגזרת עוברת מ- $-$ ל- $+$ (פונקציה עולה) הנגזרת השניה תהיה חיובית ולכן שם יש מינימום.



פונקציה קעורה

$$P_2(2; 0.66)$$

הפונקציה תיראה :



בתחום $x < -3$ הפונקציה עולה והנגזרת חיובית
 בתחום $-3 < x < 2$ הפונקציה יורדת והנגזרת שלילית
 ובתחום $x > 2$ הפונקציה שוב עולה והנגזרת חיובית.