

גבולות

ניקח סדרה של מספרים המתוארים בנוסחא הסדרה $\frac{2n+1}{n}$

תיראה $3, \frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \frac{9}{4}, \dots, \frac{2n+1}{n}$

אם נסתכל על הסידרה נראה שככל שאנו מתקדמים וגדלים ב- n אנו

קרובים למספר 2 אם ניקח $n=100$ נקבל $\frac{2 \cdot 100 + 1}{100} = \frac{201}{100}$

האיבר הראשון הוא 3 וככל שנתקדם ב- n נתקרב ל-2 (מימינו)

נכתוב זאת $x \rightarrow 2^+$

אנו אומרים שהגבול של הסידרה הוא 2. (הגבול משמאל)

אם היה מתקרב ל-2 משמאל היינו מסמנים זאת $x \rightarrow 2^-$



האברים הולכים מ-3 ועד שמגיעים כמעט ל-2 לא מגיעים ממש ל-2.

אנו אומרים שאיבר ה- n שואף ל-2 ומסמנים זאת $x \rightarrow 2^+$ והסידרה אינה מכילה את המספר 2.

ניקח את הפונקציה $f(x) = x^2$ באם נתייחס לדוגמא שלנו

$$X_n = \frac{2n+1}{n}$$

$$f(x) \rightarrow 2^2 = 4$$

אז

$$x \rightarrow 2$$

אם

רואים שכאשר x שואף ל-2 הפונקציה f שואפת ל-4.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4 \quad \text{נכתוב זאת}$$

limit - מסמן הגבול של הפונקציה הוא 4 כאשר המשתנה הבלתי תלוי x - שואף ל-2.

בסדרה שלנו $x_n = \frac{2n+1}{n}$ האיבר x שואף ל-2 מימין (בא מה-3) ואז הגבול הוא משמאל. ואם להיפך – שואף ל-2 משמאל (בא מ-1) הגבול הוא מימין.

האיבר אינו יכול לעבור את הגבול.

אם יש בתוך האינטרוול (תחום) של x נקודות בהן הפונקציה לא מתקיימת אנו אומרים שהפונקציה אינה רציפה בתחום.

$$f(x) = \sqrt{9 - x^2} \quad \text{לדוגמא: ניקח את הפונקציה}$$

אם ניקח את הטווח של $-3 \leq x \leq 3$ בתוך התחום הזה הפונקציה רציפה ובתחום $-3 \geq x \geq 3$ הפונקציה אינה רציפה מקבלים ערכים מדומים.

$$\lim \{ f(x)[+, -, *, /] g(x) \} = \lim f(x)[+, -, *, /] \lim g(x) \quad \text{נראה כמה כללים:}$$

הפעולות המתמטיות בהתאמה.

לדוגמא:

$$f(x) = \frac{x-2}{x+2} \quad \text{אם יש לנו} \quad \text{ונרצה לראות את הגבול כאשר } x \rightarrow 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-2}{x+2} = \frac{\lim(x-2)}{\lim(x+2)} \quad \text{פעולת חילוק} \quad \begin{matrix} h(x) = x-2 \\ g(x) = x+2 \end{matrix}$$

אם נציב את הגבול אליו שואף x

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-2}{x+2} = \frac{\lim(x-2)}{\lim(x+2)} = \frac{3-2}{3+2} = \frac{1}{5} \quad \text{נקבל}$$

תחום ה x הוא המספרים הממשיים אבל אם נסתכל על $x=-2$ המכנה **מתאפס** ולכן שם הפונקציה **אינה** רציפה.

דוגמאות:

1. מצא את גבול הפונקציה $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 6x + 5)$

$$\lim (x^2 - 6x + 5) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 5 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x+3}{4x-5}$$

2. מצא את גבול הפונקציה

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x+3}{4x-5} = \frac{5 + \frac{3}{x}}{4 - \frac{5}{x}} = \frac{5+0}{4-0} = \frac{5}{4}$$

נחלק מונה ומכנה ב x

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$$

3. מצא את גבול הפונקציה

$$\lim \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} = \frac{(x-3)(x+1)}{x-3} = (x+1)$$

נצמצם ב $(x-3)$ [ראה הערה] ונציב את $x=3$ נקבל שהגבול הוא 4 .

הערה: מאחר ו x שואף ל-3 הוא אף פעם לא יהיה 3 לכן $x-3$ הוא גודל שונה מאפס ולכן מותר לצמצם בו לפני המעבר לגבול..

4. מצא את גבול הפונקציה $\lim_{x \rightarrow \pm 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 9}$ כאשר

$$x^3 - 27 = (x-3)(x^2 + 3x + 9)$$

$$x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$$

כאן ב $x=3$ וב $x=-3$ המכנה מתאפס והפונקציה לא מוגדרת!
ב $x=3$ גם המונה וגם המכנה הם אפס וב $x=-3$ רק המכנה הוא אפס.

מהו הגבול כאשר $x \rightarrow 3$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 9} = \frac{(x-3)(x^2 + 3x + 9)}{(x-3)(x+3)} = \frac{x^2 + 3x + 9}{x+3} = \frac{27}{6}$$

כפי שראינו בהערה לעיל מותר לצמצם לפני הצבת הגבול.

וכאשר $x \rightarrow -3$ נקבל ∞ כלומר לא קיים גבול.