

פונקציה הפוכה:

אם נתונה פונקציה $y = f(x)$ הפונקציה ההפוכה היא $x = g(y)$

לדוגמא: אם $y = 5x - 2$ ההפוכה תהיה $x = \frac{y+2}{5}$

לפעמים יהיה יותר קל לגזור את $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ מאשר את $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

נתונה הפונקציה $\sqrt{y} = x + 1$ אנו יכולים להביא ולבטא את

$$\sqrt{y} = x + 1 \rightarrow x = \sqrt{y} - 1 = y^{\frac{1}{2}} - 1$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2(x+1)}$$

ונגזור לפי y

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = 2(x+1)$$

$$y = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

ואפשר גם

$$y' = 2x + 2$$

ועכשיו לגזור

גזירה פונקציה של פונקציה: $y = f(u)$ | $u = f(x)$

$$u = 3x + 1 \quad | \quad y = 2u^2 - 1$$

נתונה הפונקציה

מצא את הנגזרת $\frac{dy}{dx}$

אנו נגזור את $\frac{dy}{du}$ ואת $\frac{du}{dx}$

$$\frac{du}{dx} = 3 \quad \frac{dy}{du} = 4u$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

חוק השרשרת

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = 4u * 3 = 12u = \\ &= 12(3x + 1) = 36x + 12 \end{aligned}$$

אם נציב נקבל

בדוק זאת בדרך הרגילה ע"י הצבת ה- u .

חוק השרשרת נכון גם ליותר משתי פונקציות.

לדוגמא נתון $y = f(v) \mid v = f(z) \mid z = f(u) \mid u = f(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \frac{dv}{dz} \frac{dz}{du} \frac{du}{dx}$$

חוק השרשרת

נראה דוגמא: $u = 2x^2 - 1 \mid v = 4u + 5 \mid y = 2v^2 + 3$

מצא את הנגזרת $\frac{dy}{dx}$..

נגזור כל אחת בנפרד $\frac{du}{dx} = 4x \quad \frac{dv}{du} = 4 \quad \frac{dy}{dv} = 4v$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \frac{dv}{du} \frac{du}{dx} = 4v * 4 * 4x = 64xv$$

נציב את u בתוך v $v = 4(2x^2 - 1) + 5$

ונקבל את הנגזרת $\frac{dy}{dx} = 64x[4(2x^2 - 1) + 5]$

בדוק והשווה.

הנגזרת גם היא פונקציה של x ולכן גם אותה ניתן לגזור ולקבל את הנגזרת השניה של הפונקציה y . וכך אפשר להמשיך ולגזור מספר פעמים ולקבל נגזרת שלישית , רביעית וכו'.

נתונה הפונקציה $y = x^5 + 3x^3 - 2x^2 + 3x - 7$ נראה את הנגזרות.

$$\frac{dy}{dx} = y' = 5x^4 + 9x^2 - 4x + 3$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = 20x^3 + 18x - 4$$

נגזרת ראשונה ושנייה:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = y''' = 60x^2 + 18$$

נגזרת שלישית

$$y'' = 120x$$

נגזרת רביעית וחמישית

$$y' = 120$$

לאחר מכן הנגזרת היא אפס ונשארת כך גם בגזירות נוספות.