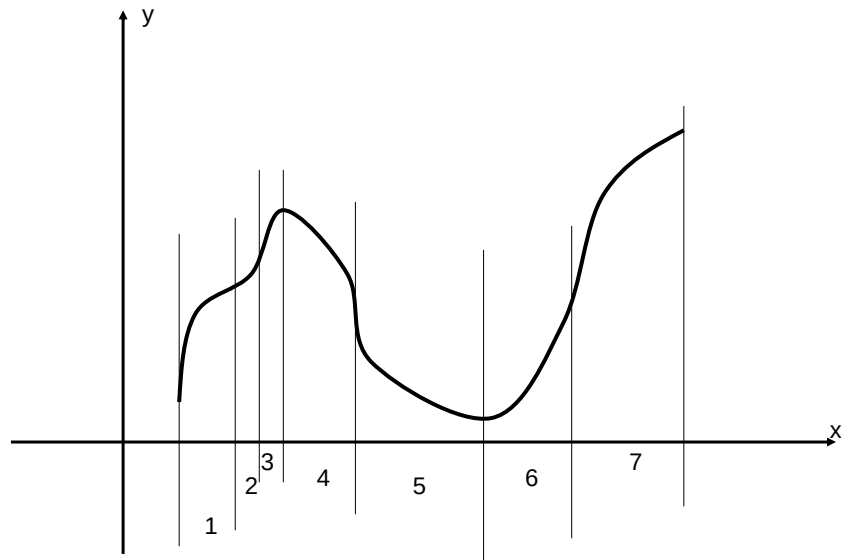


נקודות פיתול

אם נסתכל על פונקציה כללית כמו שראינו



במעבר בין התחומים ראינו את נקודות הקיצון בין 3 ל 4 ובין 5 ל 6.
במעבר בין 1 ל 2 וכן בין 2 ל 3 ובין 4 ל 5 ובין 6 ל 7 קיימות נקודות
הנקראות נקודות פיתול.

ראינו בפרק הקודם פונקציה קמורה ופונקציה קעורה נגדיר כעת
עקמומיות של פונקציה:

עקמומיות **קעורה** תקרא כאשר המשיק נמצא מתחת לקשת
שבסביבת הנקודה.

ועקמומיות **קמורה** תקרא כאשר המשיק נמצא מעל לקשת שבסביבת
הנקודה.

בתחום 1 - בכל נקודה שבו - המשיק הוא מעל הקשת של הפונקציה
ולכן בתחום זה הפונקציה קמורה.

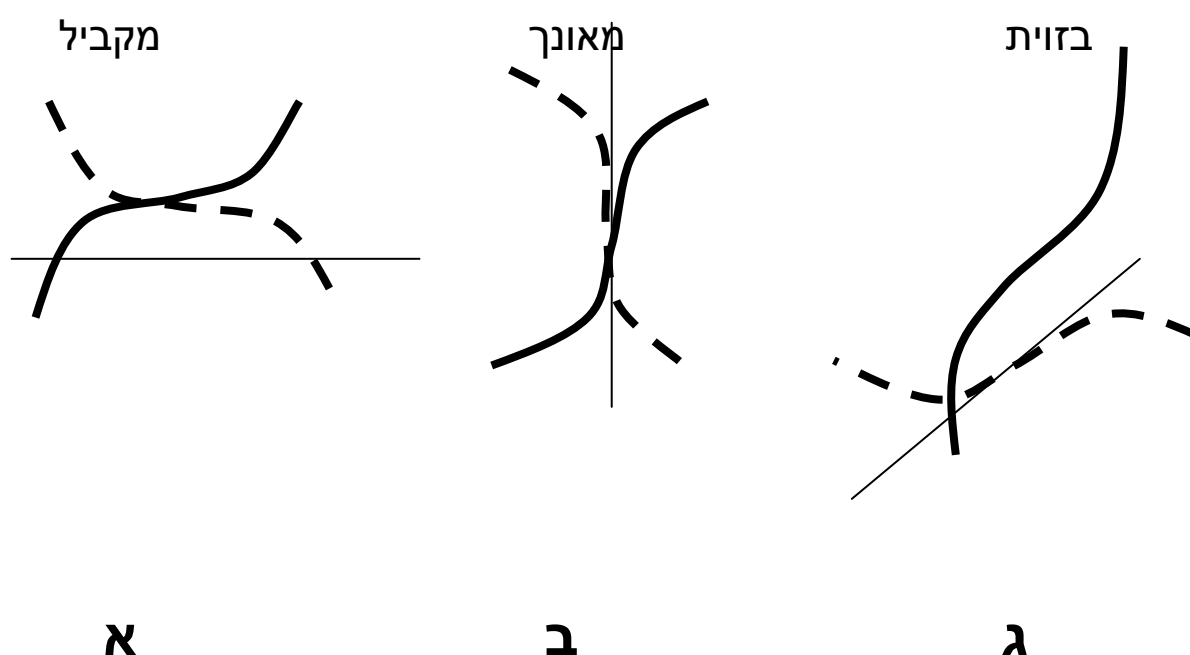
ובתחום 2 - בכל נקודה שבו - המשיק הוא מתחת לקשת של
הפונקציה ולכן בתחום זה הפונקציה קעורה.

נקודת פיתול היא נקודה בה עקמומיות קשת הפונקציה עוברת

מקעורה לקמורה או מקמורה לקעורה.

יכולים להיות מספר מצבים של מעבר. המשיק בנקודות אלו יכול

להיות מקביל לציר ה x או מאונך לו או בזוית כלשהיא. נראה זאת:



א. באם המשיק מקביל לציר ה x זה אומר שהנגזרת בנקודה זו היא אפס.

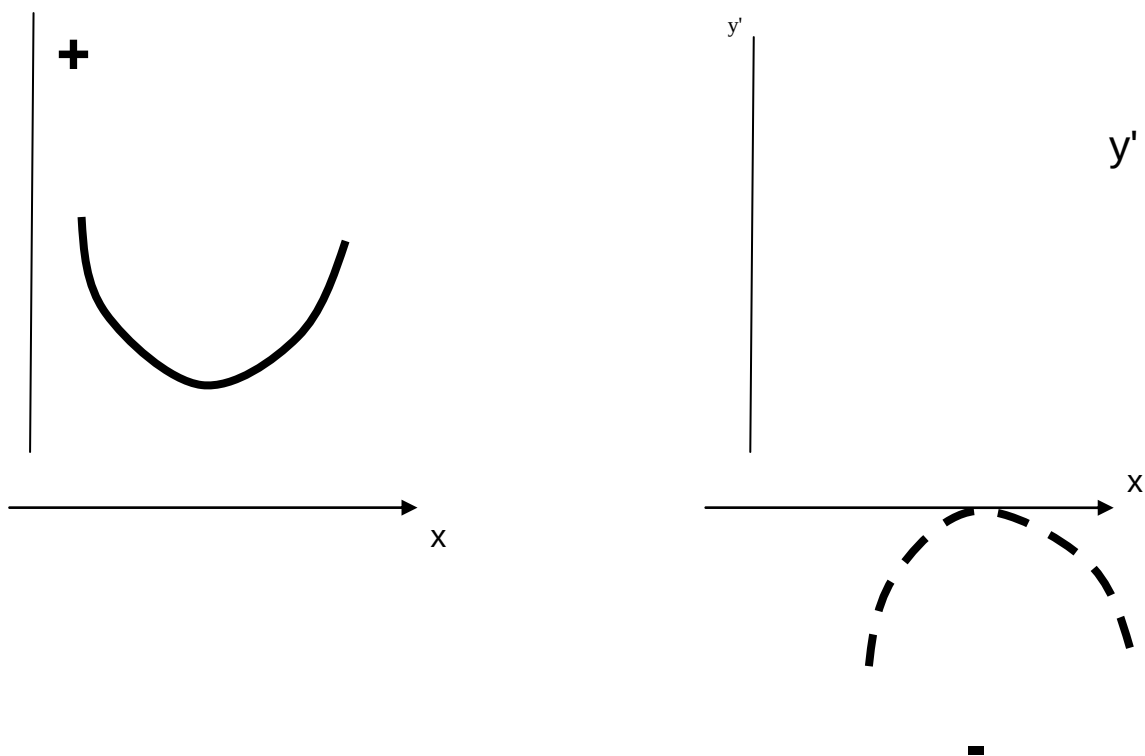
ב. באם המשיק מאונך לציר ה x זה אומר שהנגזרת בנקודה זו היא ∞ .

ג. באם המשיק בזוית כלשהיא זה אומר שלנגזרת בנקודה זו יש ערך כלשהוא בנקודת פיתול, סימן הנגזרת ה 1 ($+$ או $-$) משתי צידיה - נשמר ואינו משתנה .

באם יש שינוי בסימן במעבר, אז בנקודה זו יש ערך קיצון (מכסימום או מינימום).

במעבר בין תחום 3 ל 4 ובין תחום 5 ל 6 יש שינוי בסימן הנגזרת ולכן אלו נקודות קיצון.

א. כיצד יראה גרף הנגזרת בסביבת נקודת פיתול כאשר המשיק מקביל ל x



פונקצית הנגזרת בסביבת הנקודה תהיה מעל (+) או מתחת (-) לציר ה x .

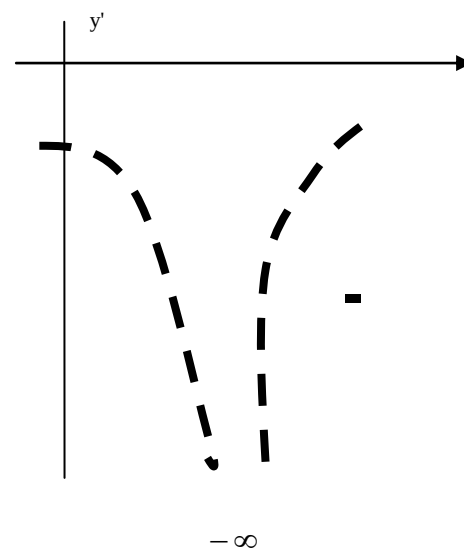
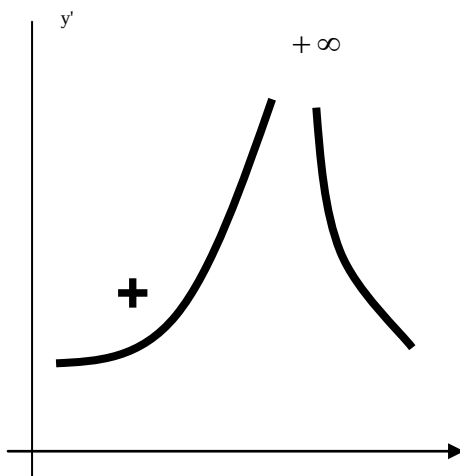
בנקודת הפיתול ערך הנגזרת יהיה אפס.

אבל גם בנקודות הקיצון הנגזרת היא אפס. כיצד נבדיל ביניהן?
נעזר בנגזרת השניה. אם נסתכל על פונקצית הנגזרת - בסביבת נקודת הפיתול, נראה כי לפונקצית הנגזרת יש מכסימום (ראה מימין, קו מרוסק) ומינימום (ראה משמאל) ולכן בנקודות אלו לנגזרת - **של**

פונקצית הנגזרת (שזו הנגזרת השניה לפונקצית המקור) – יהיה ערך אפס. כלומר לנגזרת השניה של פונקצית המקור בנקודת הפיתול יהיה ערך אפס.

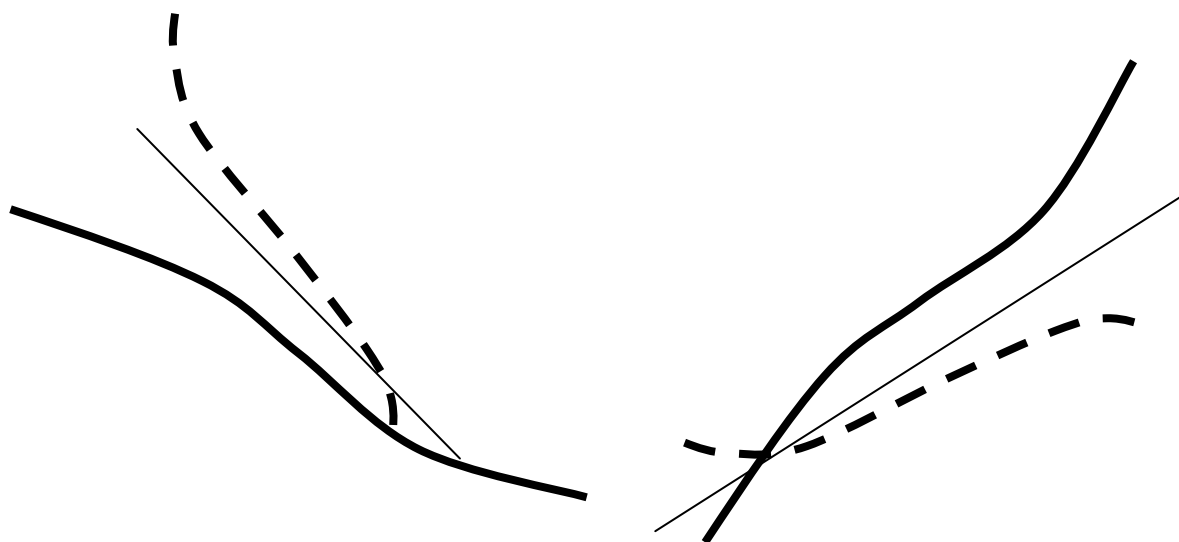
מכאן אנו למדים שאם הנגזרת הראשונה שווה לאפס בנקודה וגם הנגזרת השניה שווה לאפס בנקודה, הנקודה היא נקודת פיתול (מקבילה לציר x).

ב. נקודת פיתול כשהמשיק בנקודה **מאונך** לציר x
 כאן בנקודת הפיתול לנגזרת הראשונה יהיה ערך ∞

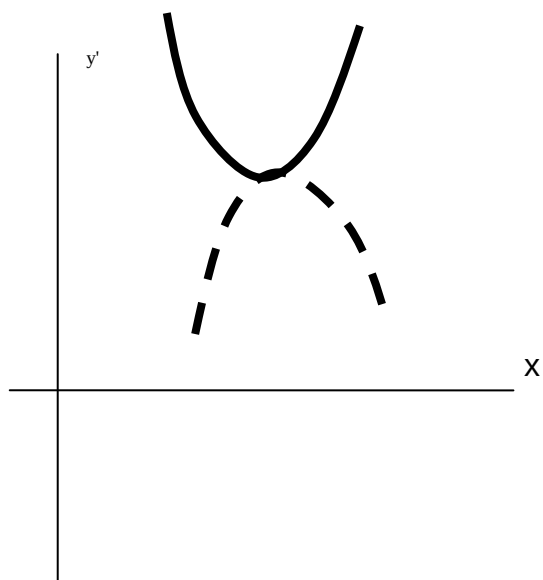
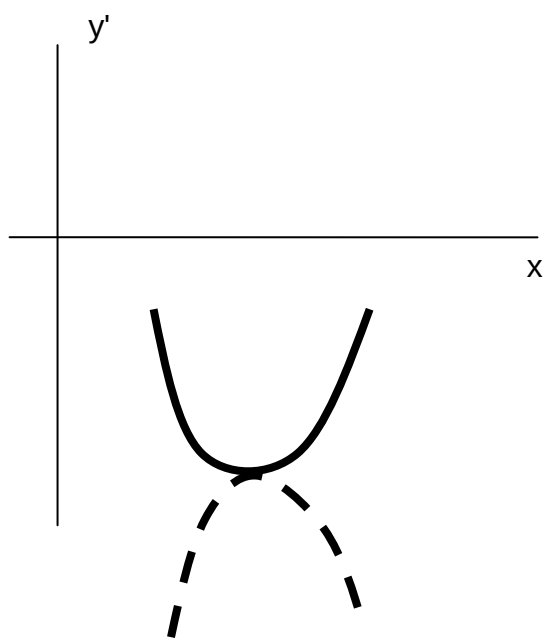


והנגזרת השניה במקרה זה **אינה** מוגדרת בנקודה.

ג. נקודת פיתול כאשר המשיק הוא בזווית כלשהיא.



ופונקצית הנגזרת הראשונה תיראה



בנקודות הפיתול לנגזרת הראשונה יהיה ערך, $+$ אם הזווית חדה (מימין) ו $-$ אם הזווית קהה (משמאל) ומשני צידי נקודת הפיתול לא יהיה שינוי בסימן.

הנגזרת השניה תהיה שווה לאפס בנקודה ותחליף סימן במעבר. החלפת סימן במעבר ניתן גם לדעת באם הנגזרת השלישית שונה מאפס בנקודה.

למציאת נקודות פיתול הנגזרת השניה שווה לאפס או שאינה

מוגדרת.

אם הנגזרת הראשונה שווה לאפס (נקודת פיתול ומקבילה לציר X) .
אם לנגזרת הראשונה יש **ערך** כלשהוא ואינה מחליפה סימן בסביבת הנקודה (עוברת מקמור לקעור או להיפך – נקודת פיתול בזווית). את זה ניתן לראות גם בעזרת הנגזרת השניה , אם הנגזרת השניה משנה את סימנה בנקודת המעבר, או בעזרת הנגזרת השלישית (באם קיימת) כאשר שונה מאפס.

דוגמא: נתונה הפונקציה $y = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 8x$

מצא את נקודות הפיתול.

$$y' = 4x^3 - 18x^2 + 24x$$

$$y'' = 12x^2 - 36x + 24$$

$$y'' = 12(x-1)(x-2) = 0$$

נגזור פעמיים את הפונקציה ונשווה לאפס

$$x_1=1$$

$$x_2=2$$

ישנן שתי נקודות בהן ייתכנו פיתול

$$y_1=-1$$

$$y_2=0$$

נציב בפונקציה לקבל את ערך y

$$y''' = 24x - 36$$

ונבדוק את הנגזרת השלישית בנקודות

נציב את הנקודות ונקבל שבנקודה 1 וגם בנקודה 2 הנגזרת

השלישית חיובית ושונה מאפס לכן יש בשתי הנקודות פיתול

$P_1(1;-1)$ $p_2(2;0)$ הן נקודות פיתול.