

## נגזרות

אם יש לנו אינטרוול של  $x$  ופונקציה של  $x$   $y = f(x)$

בתוך התחום כאשר משנים את  $x$  משתנה גם  $y$ .

נראה את הדוגמא של יצירת קופסא מפח בעמוד 5.

ראינו שהנפח  $Y = f(x) = (12 - 2x)^2 * x = 4x(6 - x)^2$

ונבדוק מספר ערכים שונים

כאשר  $x=1$  נקבל נפח של  $V = 4x(6 - x)^2$  שהוא  $V=100$

כאשר  $x=2$  נקבל נפח של  $V = 4x(6 - x)^2$  שהוא  $V=128$

כאשר  $x=3$  נקבל נפח של  $V = 4x(6 - x)^2$  שהוא  $V=108$

כאשר  $x=4$  נקבל נפח של  $V = 4x(6 - x)^2$  שהוא  $V=64$

אנו רואים שמכל שינוי ב  $x$  מקבלים שינוי ב  $y$ .

קצב השינוי של  $x$  שונה מקצב השינוי ב  $y$ .

ה  $x$  משתנה מ 1 ל 2 ובו בזמן ה-  $y$  משתנה מ 100 ל 128.

אם ניקח  $X$  באמצע התחום כלומר נעבור ב  $x=1.5$  האם גם ה  $y$

יתקבל באמצע תחום ה  $y$  כלומר יהיה  $y=114$ ?

נבדוק:  $y = 4x(6 - x)^2 = 4 * 1.5(6 - 1.5)^2 = 121.5$

אנו רואים שגם בתוך חלקי התחום, קצב שינוי ה  $y$  שונה מקצב שינוי

ה  $x$ , וככל שניקח תחומי  $x$  שונים קצב ה  $y$  יהיה שונה.

המקרה היחיד בו קצב שינוי ה  $x$  יהיה שווה לקצב שינוי ה  $y$  הוא

כאשר  $y = x + a$

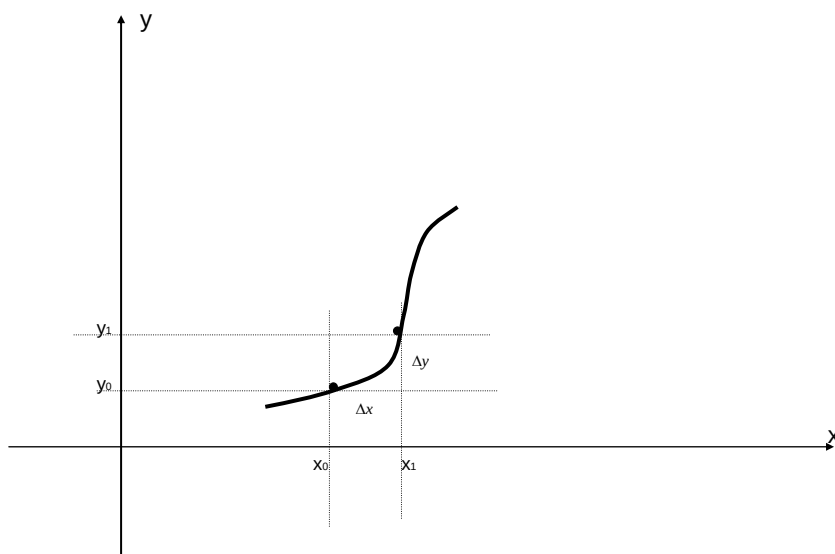
$$\Delta x = x_1 - x_0$$

את השינוי ב  $x$  נסמן

$$\Delta y = y_1 - y_0 = f(x_1) - f(x_0)$$

ואת השינוי ב  $y$  נסמן

נראה זאת בגרף:



שינוי קצב ה  $y$  ביחס לשינוי קצב ה  $x$  זה בעצם קצב השינוי  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

הממוצע של הפונקציה בתוך התחום  $\Delta x$  ואם ניקח תחום קטן של  $\Delta x$  נקבל את קצב השינוי הפונקציה בתחום צר מאוד.

ניקח דוגמא:

$$f(x) = y = 2x^2 - 3x$$

נתונה הפונקציה

$$2 \leq x \leq 3$$

נסתכל על תחום ה  $x$

$$x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 2$$

נסתכל על הנקודות

$$x_1 = 2.5 \Rightarrow y_1 = 5$$

$$x_2 = 3 \Rightarrow y_2 = 9$$

ה-  $\Delta x$  הוא 0.5 ואילו ה  $\Delta y$  בין  $x_0$  ל  $x_1$  הוא  $\Delta y_1 = 3$

ובין  $x_1$  ל  $x_2$  הוא  $\Delta y_2 = 4$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{0.5} = 6$$

והשינוי הממוצע בתחום הראשון הוא

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{0.5} = 8 \quad \text{ובתחום השני הוא}$$

אם ניקח את תחום ה- $\Delta x$  קטן מאוד (נשאיף אותו ל-0) הרי שהשינוי של הפונקציה יהיה ממש באותה נקודת  $x_i$ .

**נגדיר:** הנגזרת של הפונקציה – קצב שינוי הפונקציה ביחס לשינוי ה- $x$

כאשר  $\Delta x \rightarrow 0$ .

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{נכתוב זאת}$$

את הנגזרת של הפונקציה  $y$  נהוג לסמן  $y'$  או  $f'(x)$ .

$$f(x_1) = f(x_0 + \Delta x) \quad \text{אם} \quad \Delta y = f(x_1) - f(x_0) \quad \text{ו-}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \text{נקבל}$$

וזו הנגזרת של הפונקציה  $y$ .

**דוגמא:**

$$f(x) = x^2 + 3x \quad \text{נתונה הפונקציה}$$

$$f(x_0) = x_0^2 + 3x_0 \quad \text{לכן בנקודה } x_0$$

$$x_1 = x_0 + \Delta x \quad \text{ובנקודה } x_1$$

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^2 + 3(x_0 + \Delta x) \\ \Delta y &= f(x_1) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 + 3(x_0 + \Delta x) - (x_0^2 + 3x_0) = \\ &= x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 + 3x_0 + 3\Delta x - x_0^2 - 3x_0 = \\ &= 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 + 3\Delta x \end{aligned}$$

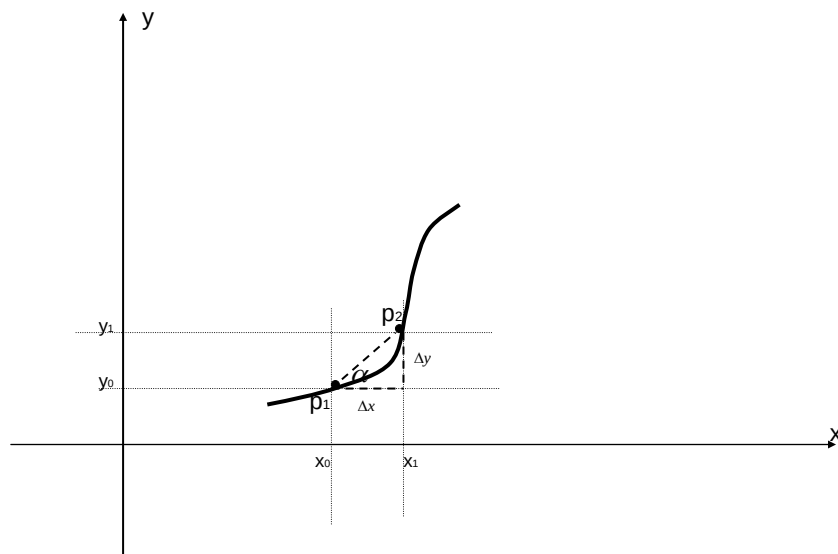
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0 \Delta x + (\Delta x)^2 + 3\Delta x}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x + 3$$

והנגזרת

ואם נציב את הגבול  $\Delta x \rightarrow 0$  נקבל את הנגזרת ב  $x_0$   $y' = 2x_0 + 3$

אם נרצה לראות מה הנגזרת ב  $x=2$  נציב  $y'(2) = 2 * 2 + 3 = 7$

נסתכל מהי הנגזרת מבחינה גרפית



נחבר את נקודות  $p_1$  ו  $p_2$  בקו ישר ונקבל משולש ישר זווית והיחס

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan \alpha$  הוא בעצם השיפוע של הישר  $p_1-p_2$  כלפי ציר ה  $x$ .

ואם ניקח  $\Delta x$  מאוד קטן הישר  $p_1-p_2$  הוא המשיק בנקודה  $x_0$ .

אנו ראינו שהנגזרת שונה בכל נקודה ונקודה והיא תלויה ב  $x$  כלומר

הנגזרת היא פונקציה של  $x$  כפי שראינו בדוגמא  $y = 2x^2 + 3x$

$$y' = f'(x) = 2x + 3$$

נסתכל על הנקודות

$$x_0 = 2 \quad y_0 = 2 \quad y' = 7$$

$$x_1 = 2.5 \quad y_1 = 5 \quad y' = 8$$

$$x_2 = 3 \quad y_2 = 9 \quad y' = 9$$

בכל נקודה של  $x$  אנו מקבלים נגזרת שונה.

**בפונקציה שבה קיימת נקודת אי רציפות בנקודה זו אין נגזרת.**

וכן אם קיימת נגזרת בנקודה מסוימת זה אומר שהפונקציה רציפה באותה נקודה. אבל לא להיפך! יכולה להיות פונקציה רציפה שאין לה נגזרת.

(נראה זאת באחד הפרקים הבאים).

**דוגמא:** נתונה הפונקציה  $f(x) = y = x^2 - x - 6$

מצא את  $\Delta y$  ואת  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  ביו  $x_0$  ל  $x_1$

כאשר  $x_1 = 3.2$   $x_0 = 3$  ו כאשר  $x_1 = 2.8$   $x_0 = 3$

נראה את ה  $\Delta x$  במקרה הראשון  $\Delta x = x_1 - x_0 = 3.2 - 3 = 0.2$

ובמקרה השני  $\Delta x = x_1 - x_0 = 2.8 - 3 = -0.2$

נקבל את ערכי הפונקציה בנקודות

$$f(3.2) = 3.2^2 - 3.2 - 6 = 1.04$$

$$f(3) = 3^2 - 3 - 6 = 0$$

$$f(2.8) = 2.8^2 - 2.8 - 6 = -0.96$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1.04}{0.2} = 5.2$$

נחשב את  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  במקרה א'

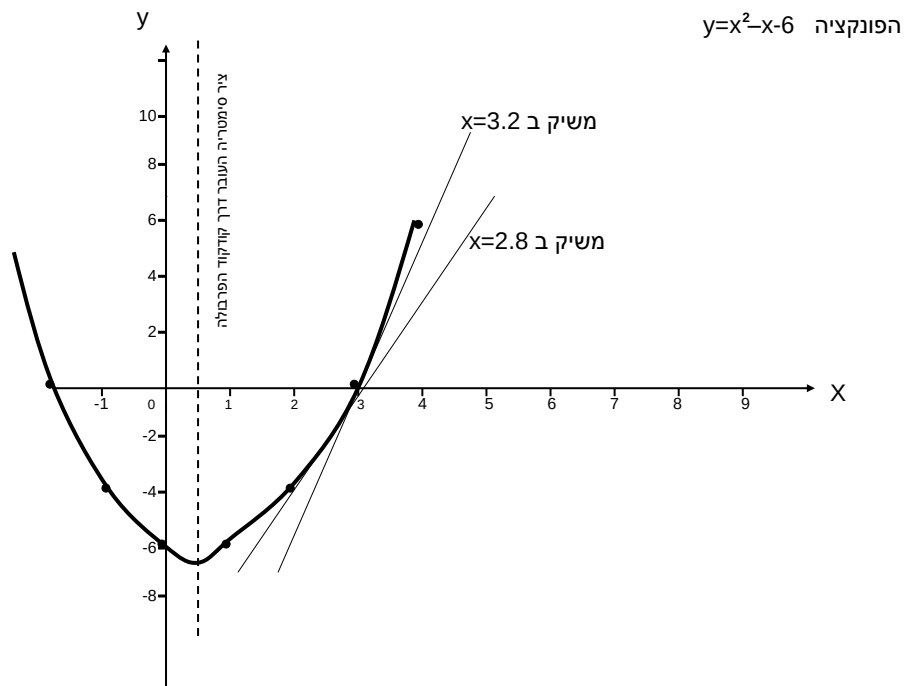
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-0.96}{-0.2} = 4.8$$

ו במקרה ב'

משני צידי  $x_0$  השיפוע שונה.

זהו קצב השינוי הממוצע של  $y$  בתוך האינטרוול.

## נראה את הגרף



מבחינה גיאומטרית  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  זה שיפוע הקטע שבין 3 ו 3.2 והשיפוע

שבין 2.8 ל 3.

השיפוע ( $\tan \alpha$ ) נמדד בין הציר החיובי של x ובין המשיק בנקודה על הגרף.

נראה גזירה של מספר פונקציות

1. גזירה של קבוע  $y = c$

כאן הפונקציה לכל y היא תמיד c

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c - c}{\Delta x} = 0$$

$$y = c$$

$$y' = 0$$

כלומר

2. גזירה של  $y = ax$  |  $y_1 = ax_1$  |  $y_2 = ax_2 = a(x_1 + \Delta x)$

$$\Delta y = y_2 - y_1 = a(x_1 + \Delta x) - ax_1 = a\Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a\Delta x}{\Delta x} = a$$

$$y = ax$$

$$y' = a$$

כלומר נגזרת של

3. נגזרת של  $u+v$  כאשר  $u$  ו  $v$  הן פונקציות של  $x$ .

$$v = 5x \quad | \quad u = 2x$$

$$y = 2x + 5x$$

לדוגמא

באותו אופן כמו קודם נקבל

$$y = ax + bx$$

$$y' = a + b$$

4. נגזרת של  $u \cdot v$  לדוגמא  $y = ax(bx + 3)$

$$v = bx + 3 \quad | \quad u = ax$$

$$y = u \cdot v$$

$$y' = u'v + v'u$$

כאשר  $u'$  ו  $v'$  הן נגזרות לפי  $x$

$$u = ax \rightarrow u' = a$$

$$v = bx + 3 \rightarrow v' = b$$

בדוגמא שלנו:

$$y = U \cdot V$$

$$y' = aV + bU$$

ולכן הנגזרת תהיה

$$y' = \frac{U' \cdot V - V' \cdot U}{V^2}$$

$$y = \frac{U}{V}$$

5. נגזרת של

גם כאן  $u$  ו  $v$  הן פונקציות של  $x$

$$y' = maX^{m-1}$$

$$y = aX^m$$

6. נגזרת של

נראה מספר דוגמאות

$$y = 5x^3 - 2x^2 + 7$$

$$y' = 3 \cdot 5x^2 - 2 \cdot 2x = 15x^2 - 4x$$

1.

$$U = x^2 + x - 3$$

$$V = x + 4$$

$$y = \frac{x^2 + x - 3}{x + 4} \quad \text{ניקח}$$

2.

$$U' = 2x + 1$$

$$V' = 1$$

נגזור את U ואת V

$$y' = \frac{U'V - V'U}{V^2} = \frac{(2x+1)(x+4) - 1(x^2 + x - 3)}{(x+4)^2}$$

הערה: כאשר  $x = -4$  המכנה מתאפס והפונקציה אינה מוגדרת בנקודה זו.

$$y = 8 - 5x^2 \quad 3. \text{ מצא את שיפוע העקום}$$

א. בנקודה  $x_0 = 1$

ב. באיזו נקודה זווית השיפוע תהיה  $45^\circ$

ג. באיזו נקודה תהיה הזווית  $0^\circ$  ? ומה זה אומר ?

$$y' = -10x \quad \text{ראשית נגזור את הפונקציה.}$$

א. נציב את ה  $x_0 = 1$  ונקבל  $y' = -10 * 1 = -10 = \tan \alpha$

מהמחשבון נמצא את הזווית  $\alpha = \tan^{-1}(-10) = 96^\circ$

ב. בזווית של  $45^\circ$  ה-  $\tan 45^\circ = 1$  וזו הנגזרת

$$y' = 1 = -10x$$

$$x = -\frac{1}{10}$$

לכן

ג. הזווית  $0$  היא כאשר המשיק בנקודה מקביל לציר ה-x-ים.

$$y' = 0 = -10x$$

$$x = 0$$

ושם  $\tan 0^\circ = 0$  נציב ונקבל

מה זה אומר?

$$y = -x^2 + 5x - 6 \quad 4. \text{ מצא את שיפועי המשיקים לפרבולה}$$

בנקודות החיתוך שלה עם ציר ה x ועם ציר ה y.



נמצא את נקודות החיתוך של הפרבולה עם הצירים

בחיתוך עם ציר ה  $x$  הפונקציה  $(y)$  היא אפס ולכן

$$y = -x^2 + 5x - 6 = 0$$

$$-(x-3)(x-2) = 0$$

$$x_2 = 2 \quad | \quad x_1 = 3$$

בנקודת החיתוך עם ציר ה  $y$  שם  $x=0$  וה  $y=-6$

נגזור את הפונקציה  $y' = -2x + 5$

נציב את הערכים ונקבל ב-  $x=3$   $y' = -2x + 5 = -2 \cdot 3 + 5 = -1$

וזו זווית של  $\alpha = 135^\circ$

ב-  $x=2$   $y' = -2x + 5 = -2 \cdot 2 + 5 = 1$

וזו זווית של  $\alpha = 45^\circ$

ובנקודת החיתוך עם ציר ה  $y$   $x=0$   $y' = -2x + 5 = -2 \cdot 0 + 5 = 5$

וזו זווית של  $\tan \alpha = 5$   
 $\tan^{-1} 5 \cong 79^\circ$

צייר את הגרף ובדוק!

ראינו עד כה שהנגזרת נותנת לנו כיצד מתנהגת הפונקציה.

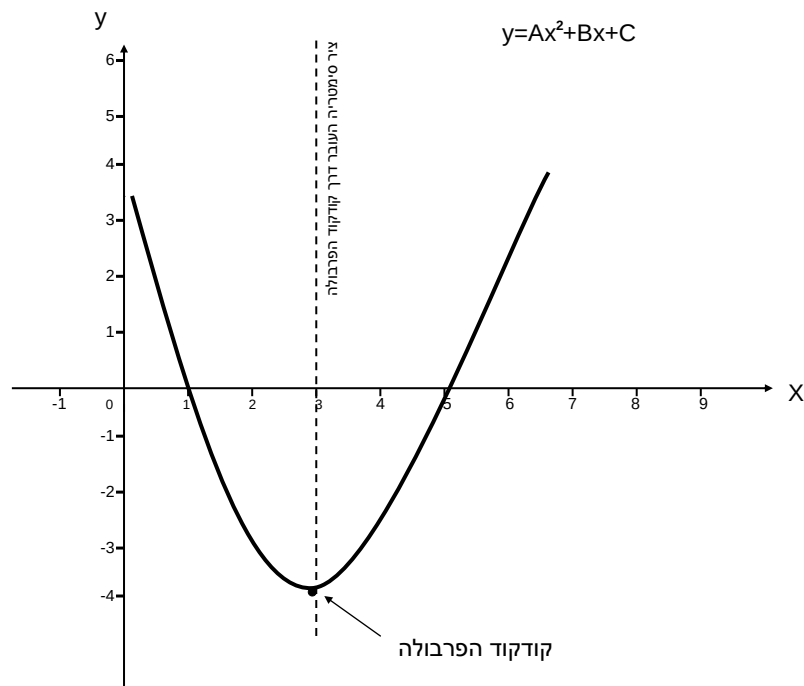
### נגדיר:

**פונקציה עולה:** ככל שמתקדמים ב  $x$  ערך הפונקציה  $(y)$  עולה.

**פונקציה יורדת:** ככל שמתקדמים ב  $x$  ערך הפונקציה  $(y)$  יורד.

התקדמות ב  $x$  הכוונה שערך ה  $x$  הולך וגדל (ימינה).

## אם נסתכל על הגרף



מצד שמאל עד לציר הסימטריה (שם קודקוד הפרבולה) הפונקציה יורדת ומקדקוד הפרבולה וימינה הפונקציה עולה.  
 כשהפונקציה יורדת שיפוע המשיק הוא מעל  $90^\circ$  ועד ל  $180^\circ$  ולכן שם הנגזרת תהיה שלילית ה  $\tan$  של זווית קהה הוא - .  
 וכשהפונקציה עולה שיפוע המשיק הוא מעל  $0^\circ$  ועד ל  $90^\circ$  ולכן שם הנגזרת תהיה חיובית ה  $\tan$  של זווית חדה הוא + .