

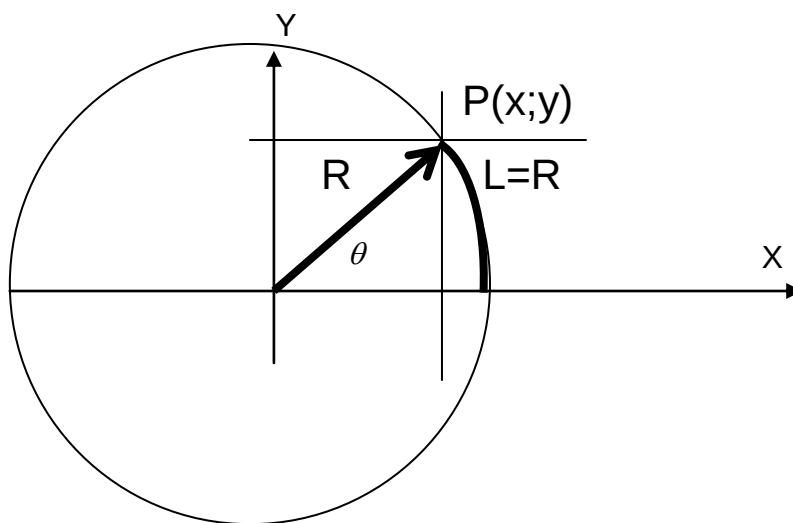
גזירה של פונקציות טריגונומטריות

נסתכל על מערכת צירים $x; y$ ונבחר זווית כלשהיא θ כל נקודה במישור ניתן להגדיר ע"י ערכי x ו- y שלהן מהראשית או ע"י מרחק הנקודה מהראשית והזווית הנוצרת עם ציר ה- x - θ . זו נקראת מערכת קוטבית כפי שנראה ביתר פירוט בפרק הדן במערכת זו.

הקו המחבר את הנקודה עם ראשית הצירים נקרא **רדיוס וקטור**.

נגדיר זווית הנקראת **רדיאן**:

רדיאן היא הזווית הנוצרת בין ציר ה- x והרדיוס וקטור R כאשר אורך הקשת L שווה לרדיוס המעגל.



זווית שטוחה היא π ברדיאנים, זה אומר ש R נכנס 3.14 פעמים בתוך קשת של חצי מעגל. שיטה זו מקנה לנו נוחות בחישוב היקף, שטח וגזרה של מעגל.

לדוגמא: היקף של מעגל הוא $2\pi R$

שטח מעגל הוא πR^2

ושטח גזרה הוא $\frac{\theta R^2}{2}$ כאשר זווית הגזרה היא

ברדיאנים.

נסתכל על הגרף: נבחר נקודה $P(x;y)$ על הקרן היוצאת מראשית הצירים (רדיוס וקטור) כך שמרחקה מהראשית יהיה $R=1$. מכאן

$$\sin \theta = \frac{y}{1} \Rightarrow y = \sin \theta$$

נקבל

$$\cos \theta = \frac{x}{1} \Rightarrow x = \cos \theta$$

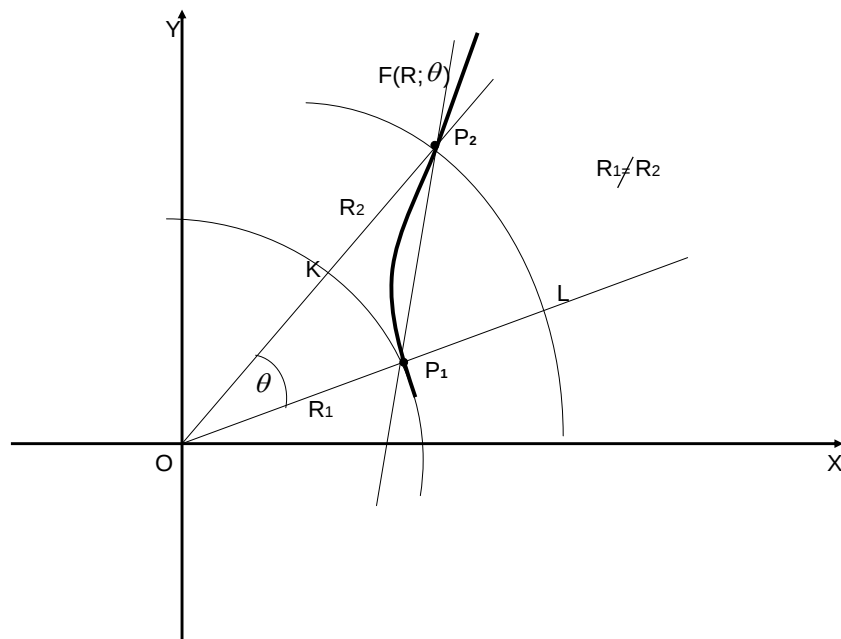
תחום ההגדרה של $\sin$ ושל $\cos$ הוא ± 1 .

ומאחר ו $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ אזי ב $\cos \theta = 0$ הפונקציה לא מוגדרת וזה

$$\theta_2 = \frac{3\pi}{2} + n * 2\pi \quad | \quad \theta_1 = \frac{\pi}{2} + n * 2\pi$$

כאשר

לצורך חישוב הנגזרת נראה גבול של $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta}$.. נסתכל על



נסתכל על השטחים של המשולש OP_1P_2 של הגזרה OP_1K והגזרה

$$S_{\Delta OP_1P_2} = \frac{R_1 R_2 \sin \theta}{2}$$

$$S_{OP_1K} = \frac{R_1^2 \cdot \theta}{2} \quad OP_2L \text{ ברדיאנים}$$

$$S_{OP_2L} = \frac{R_2^2 \cdot \theta}{2}$$

שטח גזרה $OP_2L \leq$ שטח משולש $OP_1P_2 \leq$ שטח גזרה OP_1K

$$\frac{R_1^2 \cdot \theta}{2} \leq \frac{R_1 R_2 \sin \theta}{2} \leq \frac{R_2^2 \cdot \theta}{2} \quad \text{לכן}$$

$$\frac{R_1 \cdot \theta}{R_2} \leq \sin \theta \leq \frac{R_2 \cdot \theta}{R_1} \quad \text{נחלק ב } \frac{R_1 R_2 \cdot \theta}{2} \neq 0 \text{ ונקבל}$$

$$\frac{R_1}{R_2} \leq \frac{\sin \theta}{\theta} \leq \frac{R_2}{R_1} \quad \text{נחלק } \theta \neq 0 \text{ ונקבל}$$

ונעבור עכשיו לגבול כאשר $\theta \rightarrow 0$ אז $R_2 \rightarrow R_1$

$$1 \leq \frac{\sin \theta}{\theta} \leq 1$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} \rightarrow 1 \quad \text{מכאן}$$

נראה את הנגזרת של $y = \sin(u)$ כאשר $u = f(x)$ וגזירה

$$y + \Delta y = \sin(u + \Delta u)$$

$$\Delta y = \sin(u + \Delta u) - \sin u$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \quad \text{מהטריגונומטריה ידוע}$$

$$\Delta y = 2 \cos\left(\frac{2u + \Delta u}{2}\right) \sin\left(\frac{\Delta u}{2}\right) = 2 \cos\left(u + \frac{\Delta u}{2}\right) \sin\left(\frac{\Delta u}{2}\right) \quad \text{לכן}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{\cos\left(u + \frac{\Delta u}{2}\right) \sin\left(\frac{\Delta u}{2}\right)}{\frac{\Delta u}{2}} \quad \text{נחלק ב } \Delta u \text{ ונוריד את ה-2 למכנה}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = \cos\left(u + \frac{\Delta u}{2}\right) * \frac{\sin\left(\frac{\Delta u}{2}\right)}{\frac{\Delta u}{2}} \quad \text{נכתוב זאת}$$

ראינו כי $\lim_{\frac{\Delta u}{2} \rightarrow 0} \frac{\sin(\frac{\Delta u}{2})}{\frac{\Delta u}{2}} \rightarrow 1$ כאשר $\frac{\Delta u}{2} \rightarrow 0$ ולכן

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = \lim \cos(u + \frac{\Delta u}{2}) * \lim_{\frac{\Delta u}{2} \rightarrow 0} \frac{\sin(\frac{\Delta u}{2})}{\frac{\Delta u}{2}} = \lim \cos(u + \frac{\Delta u}{2}) * 1$$

קבלנו שהנגזרת $\frac{dy}{du} = \cos u$

ומתוך חוק השרשרת $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx}$

מכאן הנגזרת של $\sin$ $\frac{dy}{dx}(\sin u) = \frac{dy}{du}(\sin u) * \frac{du}{dx} = \cos u * \frac{du}{dx}$

דוגמא: $y = \sin(2x)$ מצא את הנגזרת

נציב $u = 2x$ והנגזרת $\frac{du}{dx} = 2$ מכאן נמצא את $\frac{dy}{dx} = \cos(2x) * 2$

דוגמא נוספת $y = \sin(x^2 - 3)$ כאן נציב $u = x^2 - 3$

והנגזרת תהיה $\frac{du}{dx} = 2x$ ומכאן $y' = \cos(x^2 - 3) * 2x$

נראה את הנגזרת של $y = \cos u$

מהטריגונומטריה ידוע כי $\cos u = \sin(90 - u) = \sin(\frac{\pi}{2} - u)$

לכן נוכל לכתוב $y = \cos u = \sin(\frac{\pi}{2} - u)$

והנגזרת של ה $\sin$ היא $y' = \cos(\frac{\pi}{2} - u) * (-1)$

אבל $\cos(\frac{\pi}{2} - u) = \sin u$ ולכן $y' = \sin u * (-1) = -\sin u$

את הנגזרת של $y = \tan u$ נמצא בעזרת $\tan u = \frac{\sin u}{\cos u}$

$$y = \frac{\sin u}{\cos u}$$

ולפי שראינו נגזרת של $\frac{U}{V}$

$$y' = \frac{U'v - V'u}{V^2} = \frac{\cos u * \cos u - \sin u * (-\sin u)}{\cos^2 u} * \frac{du}{dx}$$

$$y' = \frac{\cos^2 u + \sin^2 u}{\cos^2 u} * \frac{du}{dx} = \frac{1}{\cos^2 u} * \frac{du}{dx}$$

דוגמא נציב $y = \tan^2 x$ ואז $y = u^2$ ו $\tan x = u$

והנגזרת $y' = 2 \tan x * \frac{1}{\cos^2 x}$

דוגמאות שונות

1. $y = \sin 2x + \cos 3x$
 $y' = \cos 2x * 2 + (-\sin 3x) * 3 = 2 \cos 2x - 3 \sin 3x$

2. $y = \sin^3(x^2 - 2x)$ נציב $v = \sin u$, $u = x^2 - 2x$

לאחר ההצבה $y = v^3$

הנגזרות $\frac{dy}{dv} = 3v^2$ וכן $\frac{dv}{du} = \cos u$ ושל $\frac{du}{dx} = 2x - 2$

לפי חוק השרשרת $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} * \frac{dv}{du} * \frac{du}{dx}$

נקבל $y' = 3v^2 * \cos u * (2x - 2)$

לאחר שנציב נקבל $y' = 3 \sin^2(x^2 - 2x) * \cos(x^2 - 2x) * (2x - 2)$

3. נתון $y = \sin 2x * \cos 3x$ מהי הנגזרת?

לפי מכפלת $Y = U * V$ $y' = 2 \cos 2x * \cos 3x + (-3 \sin 3x) * \sin 2x$

ניקח עכשיו פונקציה סתומה $\cos y = \sin 2x$

$$\frac{d}{dx} = \frac{d}{dy} * \frac{dy}{dx} \quad \text{ראינו}$$

$$-\sin y * y' = 2 \cos 2x \quad \text{לכן}$$

$$y' = \frac{2 \cos 2x}{-\sin y} \quad \text{ומכאן}$$

$$0 \leq x \leq 2\pi \quad \text{בתחום} \quad y = x + 2 \sin x \quad \text{4. נתון}$$

מצא נקודות מקסימום ומינימום

$$y' = 1 + 2 \cos x = 0 \quad \text{נגזור ונשווה לאפס}$$

$$x = \pi \pm \frac{\pi}{3} \quad \text{מכאן בתחום שלנו} \quad \cos x = -\frac{1}{2}$$

בשתי נקודות בתחום יכולות להיות מקסימום, מינימום (או פיתול)

$$y'' = -2 \sin x \quad \text{נבדוק את הנגזרת השניה.}$$

נציב את ה x-ים שמצאנו ונמצא את ערכי y" המתאימים.

$$x_1 = \frac{2\pi}{3} \quad x_2 = \frac{4\pi}{3}$$

$$y_1'' = -2 \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = - \quad \text{לכן כאן יש נקודת מקסימום}$$

$$y_2'' = -2 \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = + \quad \text{לכן כאן יש נקודת מינימום}$$

נציב את ה x-ים ונקבל את ערכי הפונקציה בנקודות.

$$y_1 = \frac{2\pi}{3} + 2 \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{3} + 2 * \frac{\sqrt{3}}{2} = 3.83$$

$$y_2 = \frac{4\pi}{3} + 2 \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{4\pi}{3} + 2 * \frac{-\sqrt{3}}{2} = 2.46$$

$$\text{הנקודות} \quad P_1\left(\frac{2\pi}{3}; 3.83\right) \quad \text{מקסימום} \quad \text{ו} \quad \text{מינימום} \quad P_2\left(\frac{4\pi}{3}; 2.46\right)$$

נראה עכשיו נקודות פיתול את הנגזרת השניה השווה לאפס

$$y'' = -2 \sin x = 0$$

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = 0 + n\pi \quad \text{זה כאשר}$$

ובתחום שלנו בנקודות $0, \pi, 2\pi$ יש פיתול

אפשר לדעת את "זווית הפיתול" על ידי הצבת ערכים אלו בנגזרת

הראשונה. ניקח את הנקודה π

$$y' = 1 + 2 \cos x = 1 + 2 \cos \pi = 1 + 2 * (-1) = -1$$

הזווית היא 135°

$$0 \leq x < 2\pi \quad \text{בתחום} \quad y = \cos^2 x - \cos x \quad \text{5. נתון}$$

מצא נקודות קיצון ופיתול

$$y' = 2 \cos x * (-\sin x) + \sin x = 0 \quad \text{נגזור ונשווה לאפס}$$

$$\sin x (1 - 2 \cos x) = 0$$

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = 0 + n\pi \quad \text{מכאן}$$

$$1 - 2 \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} (60^\circ), \frac{5\pi}{3} (300^\circ)$$

נגזור נגזרת 2 ונציב הערכים

$$\begin{aligned} y'' &= -2 \sin x * (-\sin x) + (-\cos x) * 2 \cos x - \cos x = \\ &= 2 \sin^2 x - 2 \cos^2 x + \cos x = 2(1 - \cos^2 x) - 2 \cos^2 x + \cos x = \\ &= -4 \cos^2 x + \cos x + 2 \end{aligned}$$

$$\text{בנקודות } 0, \pi \quad y'' = -1, -3 \quad \text{לכן נקודות מקסימום}$$

$$\text{בנקודה } \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \quad y'' = + \quad \text{ה } \quad \text{לכן נקודות מינימום}$$

למציאת נקודות פיתול נשווה נגזרת 2 לאפס

$$-4\cos^2 x + \cos x + 2 = 0$$

מתוך פתרון של משוואה ריבועית נקבל

$$\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+32}}{-8} = \frac{1 \pm 5.744}{8} \Rightarrow \cos x = 0.843, -0.593$$

$$x = 32.5^\circ, 126.35^\circ, 233.65^\circ, 327.5^\circ \quad \text{הזוויות המתאימות הן:}$$

בנקודות אלו יש פיתול.