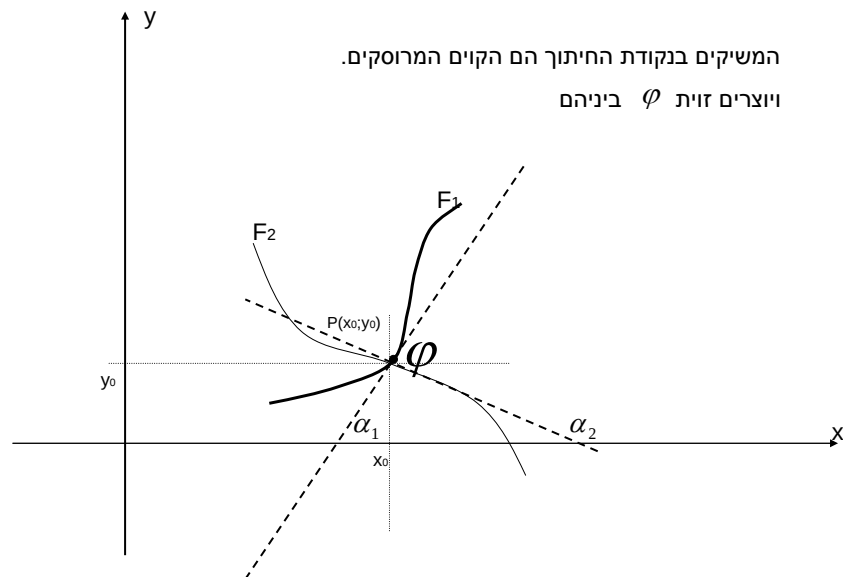


זווית חיתוך בין שתי עקומות

זווית החיתוך בין שתי עקומות היא הזווית שבין שני המשיקים לפונקציות בנקודת החיתוך.



תהא $P(x_0; y_0)$ נקודת החיתוך בין הפונקציות F_1 ו F_2 .
בנקודת החיתוך $F_1(x_0) = F_2(x_0)$ זו נקודה משותפת לשתי הפונקציות.
המשיק בנקודה של F_1 הוא הנגזרת $F_1'(x_0)$ ושל F_2 הוא $F_2'(x_0)$

$$F_2'(x_0) = m_2 = \tan \alpha_2 \quad F_1'(x_0) = m_1 = \tan \alpha_1$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 + (180 - \varphi)$$

$$\varphi = \alpha_1 - \alpha_2 + 180$$

$$\tan \varphi = \tan(\alpha_1 - \alpha_2)$$

ידועה הזהות לכן $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha * \tan \beta}$

$$\tan \varphi = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

זווית החיתוך בין שתי הפונקציות היא φ או $180 - \varphi$

הזוויות החדה φ והזווית הקהה $180 - \varphi$.

אם $m_1 = m_2$ זה אומר ששני המשיקים מתלכדים ואז $\tan \varphi = 0$

אם $m_1 = -\frac{1}{m_2}$ זה אומר ששני המשיקים מאונכים זה לזה ואז

$\tan \varphi = \infty$ והזווית היא 90° .

דוגמא:

נתונות שתי פונקציות $y = 4x^2$ I $5y + 4x^2 = 12$

מצא את זווית החיתוך ביניהן.

נקודת החיתוך משותפת לשתי הפונקציות לכן נשווה ונמצא את נקודת החיתוך.

נציב $4x^2$ מהפונקציה האחת בשניה
 $5y + y = 12$
 $y = 2$

נמצא את x
 $2 = 4x^2$
 $x^2 = \frac{1}{2}$

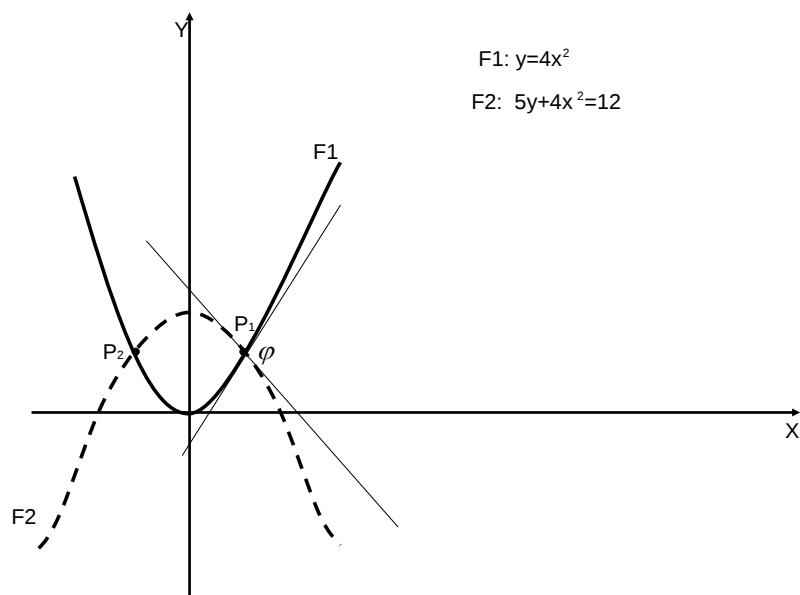
ומכאן נקבל $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ קבלנו שתי נקודות חיתוך

$$P_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 2\right) \quad P_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; 2\right)$$

נגזור $y_1' = 8x = m_1$
 $5y_2' + 8x = 0$
 $y_2' = -\frac{8}{5}x = m_2$

נציב את ה x של P_1
 $m_1 = 8 * \frac{1}{\sqrt{2}}$
 $m_2 = -\frac{8}{5\sqrt{2}}$

נצייר את שתי הפונקציות



$$F1: y=4x^2$$

$$F2: 5y+4x^2=12$$

$$P_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}};2\right)$$

נחשב את זווית החיתוך בנקודה

$$\tan \varphi = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \frac{\frac{8}{\sqrt{2}} - \frac{-8}{5\sqrt{2}}}{1 + \frac{8}{\sqrt{2}} \left(-\frac{8}{5\sqrt{2}}\right)} = \frac{6.787}{-5.4} = -1.256$$

קבלנו שלילי לכן זו תהיה הזווית הקהה.

$$\varphi = \tan^{-1}(-1.256) \cong 128^{\circ}30'$$

ומתוך המחשבון

$$\varphi = 51^{\circ}30'$$

והזווית החדה תהיה

באותו אופן נחשב לגבי הנקודה השניה.

לאחר שנציב נקבל את אותם הזוויות. וזאת כי הפונקציות שלנו הן

פרבולות והנקודות הן בדיוק משני צידי ציר הסימטריה ולשתי

הפונקציות ציר זהה.

דוגמאות

1. נתונות הפונקציות

1: $y = -2x^2 - 3x + 4$

2: $y = 2x^3 - 2x^2 - 3x + 2$

מצא את זווית החיתוך בין שתי הפונקציות.

ראשית נמצא את נקודות החיתוך נציב משוואה אחת בשנייה

$$y = -2x^2 - 3x + 4 = 2x^3 - 2x^2 - 3x + 2$$

$$2x^3 = 2$$

$$x = 1$$

נציב במשוואה למצוא את y $y = -2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 4 = -1$

קיבלנו את נקודת החיתוך: $p(1; -1)$

נגזור את 1 ונמצא את ערך הנגזרת בנקודת החיתוך

$$m_1 = y' = -4x - 3 = -4 \cdot 1 - 3 = -7$$

נגזור את 2 ונמצא את ערך הנגזרת בנקודת החיתוך

$$m_2 = y' = 6x^2 - 4x - 3 = 6 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 3 = -1$$

הנגזרות הן $\tan \alpha = m$ לגבי כל אחת מהפונקציות

$$\tan \varphi = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \frac{-7 - (-1)}{1 + (-7)(-1)} = -0.75$$

אנו מוצאים את הזווית הקהה $\varphi \cong 143^\circ$ והחדה $\varphi \cong 37^\circ$

נצייר את הגרפים

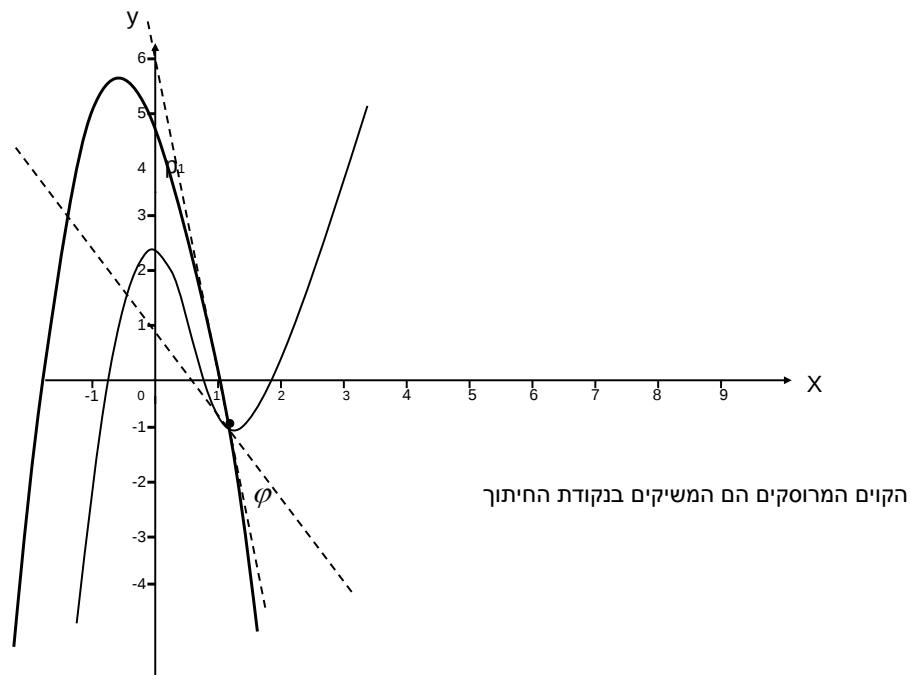
X	-2	-1	0	1	2	3
Y	2	5	4	-1	-10	-23

F1

X	-2	-1	0	1	2	3
y	-16	1	2	-1	4	29

F2

הגרפים ייראו



$$1: x^2 + y^2 = 17$$

$$2: xy = 4$$

$$3: 2y - x = 2$$

2. נתונות שלוש פונקציות

מצא את נקודת החיתוך המשותפת לכולן ואת זווית החיתוך ביניהן.

למציאת נקודות החיתוך נשווה את המשוואות. ניקח 1 ו- 2

$$x^2 + y^2 = 17$$

$$xy = 4 \quad | \cdot 2$$

$$2xy = 8$$

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$$

$$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$$

$$(x + y)^2 = 17 + 8 = 25 \Rightarrow x + y = \pm 5$$

$$(x - y)^2 = 17 - 8 = 9 \Rightarrow x - y = \pm 3$$

$$x_1 = 4 \quad y_1 = 1 \quad x_2 = 1 \quad y_2 = 4 \quad \text{נקודות החיתוך הן}$$

$$x_3 = -1 \quad y_3 = -4 \quad x_4 = -4 \quad y_4 = -1$$

ניקח את משוואות 1 ו- 3

$$1: x^2 + y^2 = 17$$

$$3: 2y - x = 2 \Rightarrow x = 2(y - 1)$$

$$x^2 = 4(y - 1)^2$$

$$4(y - 1)^2 + y^2 = 17$$

$$5y^2 - 8y - 13 = 0$$

נציב זאת ב- 1 ונקבל

$$y_1 = 2.6 \quad y_2 = -1 \quad \text{ולפי הנוסחא של משוואה ריבועית}$$

$$x_1 = 3.2 \quad x_2 = -4 \quad \text{וה- } x \text{ המתאימים להם}$$

אנו רואים שהנקודה $P(-4; -1)$ היא נקודה משותפת.

אפשר לבדוק ולהשוות גם את משוואות 2 ו- 3.

נחשב עכשיו את הנגזרות של כל פונקציה ונציב את ערכי הנקודה.

$$x^2 + y^2 = 17$$

$$1: \quad 2x + yy' = 0$$

$$y' = -\frac{x}{y} = -\frac{-4}{-1} = -4 \Rightarrow m_1 = -4$$

$$xy = 4$$

$$2: \quad 1 * y + y' * x = 0$$

$$y' = -\frac{y}{x} = -\frac{-1}{-4} = -0.25 \Rightarrow m_2 = -0.25$$

$$2y = x + 2$$

$$3: \quad y' = \frac{1}{2} \Rightarrow m_3 = 0.5$$

נחשב את זווית החיתוך בין 1 ל-2

$$\tan \varphi_{12} = \frac{-4 - (-\frac{1}{4})}{1 + (-4) * (-\frac{1}{4})} = \frac{-3.75}{2} = -1.875$$

$$\varphi_{12} \cong 118^\circ$$

זווית החיתוך בין 1 ל- 3

$$\tan \varphi_{13} = \frac{-4 - \frac{1}{2}}{1 + (-4) * \frac{1}{2}} = \frac{-4.5}{-1} = 4.5$$

$$\varphi_{13} \cong 77^0$$

זווית החיתוך בין 2 ל- 3

$$\tan \varphi_{23} = \frac{-\frac{1}{4} - \frac{1}{2}}{1 + (-\frac{1}{4}) * \frac{1}{2}} = \frac{-0.75}{0.875} = -0.85$$

$$\varphi_{23} \cong 40^0 30'$$

צייר את הגרפים.