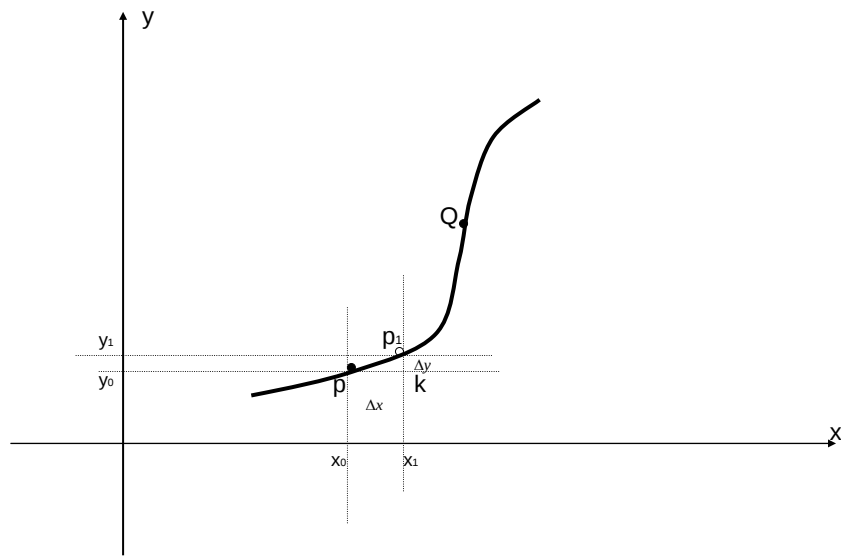


קשת ועקמומיות

נתונה פונקציה $y = f(x)$ רציפה וגזירה. נסתכל על העקומה..

שלוש הנקודות P , P_1 ו- Q הן על הגרף והנקודה P_1 קרובה ל- P .

$P(x_0; y_0)$ והנקודה $P_1(x_1; y_1)$ $x_1 = x_0 + \Delta x$ $y_1 = y_0 + \Delta y$



את אורך הקשת מ- P ל- P_1 נסמן ב- Δs ואת אורך הקשת מ- P ל- Q נסמן ב- S .

במשולש ישר הזווית P, K, P_1 אם הוא מספיק קטן ניתן לראות את

אורך הקשת כיתר של המשולש ואז

$$(1) \quad \Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$$

נחלק ב- $\Delta x^2 \neq 0$ ונקבל

$$\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2$$

$\frac{\Delta s}{\Delta x}$ נותן את קצב השינוי של אורך הקשת Δs ליחידת שינוי של Δx

והנגזרת של אורך הקשת הוא הגבול $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta y} = -1 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta x}$

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = \pm \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \quad \text{נציב}$$

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 \quad \text{אם נחלק את (1) ב } (\Delta y)^2$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta y} = \pm \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2} \quad \text{נקבל}$$

אנו ניקח את הסימן החיובי.

אם ניקח את הגבול $\lim$ כאשר $\Delta x \rightarrow 0$ ו $\Delta y \rightarrow 0$ הנקודות P ו- P₁ מתקרבות זו לזו כך שאורך הקשת PP₁ שווה לישר PP₁.

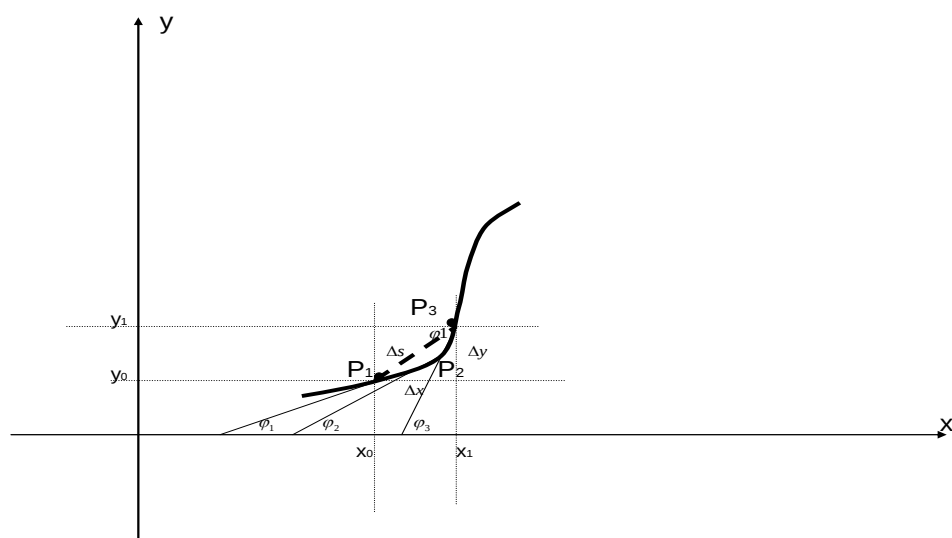
$$\frac{ds}{dy} = \pm \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \quad \text{ואז} \quad \frac{ds}{dx} = \pm \sqrt{1 + (y')^2} \quad \text{ו-}$$

וזו נגזרת אורך הקשת.

עקמומיות של פונקציה היא קצב שינוי זווית המשיק φ בנקודה ביחס

לשינוי ביחידת אורך הקשת s.

$$K = \frac{d\varphi}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} \quad \text{נסמן עקמומיות ב K ונגדיר}$$



הסתכל בגרף φ_1 זווית המשיק לנקודה P_1

φ_2 זווית המשיק לנקודה P_2

φ_3 זווית המשיק לנקודה P_3

שינויי זווית השיפוע מנקודה לנקודה לאורך Δs הם בעצם שינוי הנגזרת $\Delta y'$.

הגדרנו עקמומיות k כקצב שינוי זווית המשיק ביחס לאורך הקשת.

הנגזרת של הפונקציה היא $y' = \tan \varphi$ נציב $u = \tan \varphi$

נקבל $y' = u = \tan \varphi$ ואז $\varphi = \arctan(u)$

לחישוב העקמומיות אנו צריכים $K = \frac{\Delta \varphi}{\Delta s}$

לפי כלל השרשרת $\frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{du} \frac{du}{dx} \frac{dx}{ds}$

אם $y' = u = \tan \varphi$ אזי הנגזרת השניה היא $\frac{du}{dx} = y''$

ראינו כי $\frac{d\varphi}{du} = \frac{1}{1+u^2}$

וכן ראינו $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+u^2}$ ומכאן $\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$

נציב בכלל השרשרת ונקבל

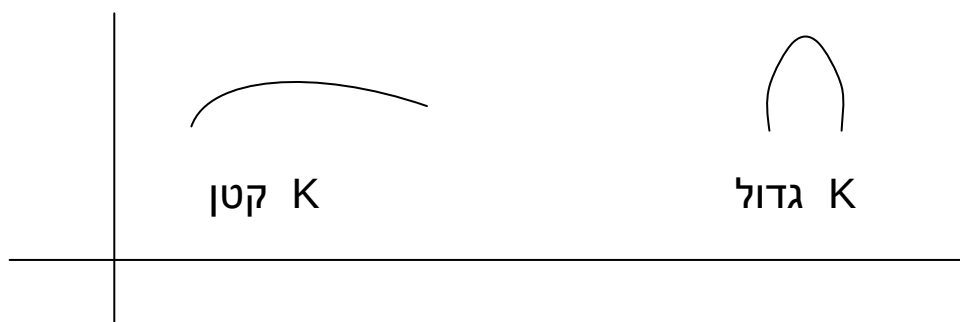
$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{1+u^2} \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} y''(x)$$

נציב את $y' = u$ ונקבל $K = \frac{y''(x)}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$

העקמומיות תלויה בנגזרת השניה של הפונקציה.

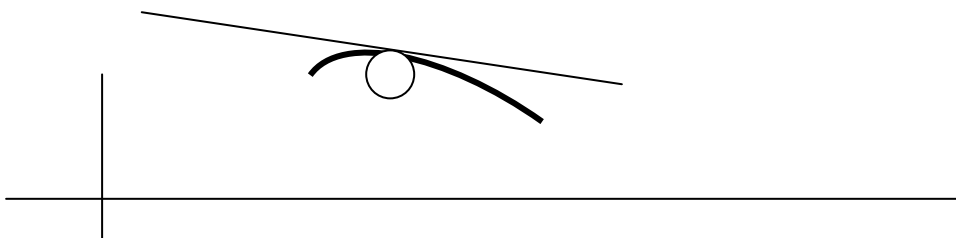
שים לב בנקודת קיצון $y' = 0$ ואז

הנגזרת השניה היא העקמומיות בנקודת הקיצון.
 ככל שהעקמומיות גדולה יותר קצב השתנות הזווית (השיפוע) גדולה יותר
 והעקומה חדה יותר.



אם מתקבל K חיובי זה מתאים לקשת קעורה ו K שלילי לקשת קמורה.

ראינו זאת בנקודות מכסימום ומינימום שבהן $y''(x)$ שלילי – זה במכסימום (קמור), וחיובי – זה במינימום (קעור).
 לעקמומיות יש **רדיוס עקמומיות** שזה רדיוס המעגל אשר מתלכד עם הקשת Δs בנקודת ההשקה.



ככל ש k קטן יותר הרדיוס יהיה גדול יותר

$$r = \frac{1}{|K|} \quad \text{ורדיוס המעגל } r \text{ הוא}$$

רדיוס מעגל העקמומיות מאונך למשיק. זה אומר שהוא נמצא על הנורמל ואם נגזור את הפונקציה (כמו שלמדנו במשיק ונורמל) אם

$$y' = \tan \alpha = m \quad \text{המשיק הוא} \quad -\frac{1}{m} \quad \text{אזי הנורמל יהיה}$$

את מרכז המעגל $M(x_0; y_0)$ נוכל למצוא בעזרת נקודת ההשקה $P(x_0; y_0)$ הנורמל הוא $y_M - y_0 = -\frac{1}{m}(x_M - x_0)$ (מרכז המעגל) M .

דוגמאות

$$y^2 = 12x \quad 1. \text{ נתונה הפרבולה}$$

מה העקמומיות בנקודה $P(3;6)$

$$2yy' = 12 \rightarrow y' = \frac{6}{y} \quad \text{נגזור את הפונקציה פעמיים}$$

$$y'' = \frac{0 \cdot y - y' \cdot 6}{y^2} \quad \text{נגזור פעם נוספת את} \quad y' = \frac{6}{y}$$

$$y'' = \frac{-1 \cdot 6}{12 \cdot 3} = -\frac{1}{6} \quad \text{נציב את הנקודה } P \quad y' = \frac{6}{6} = 1$$

מכאן נחשב את העקמומיות, את רדיוס העקמומיות ואת מרכז המעגל.

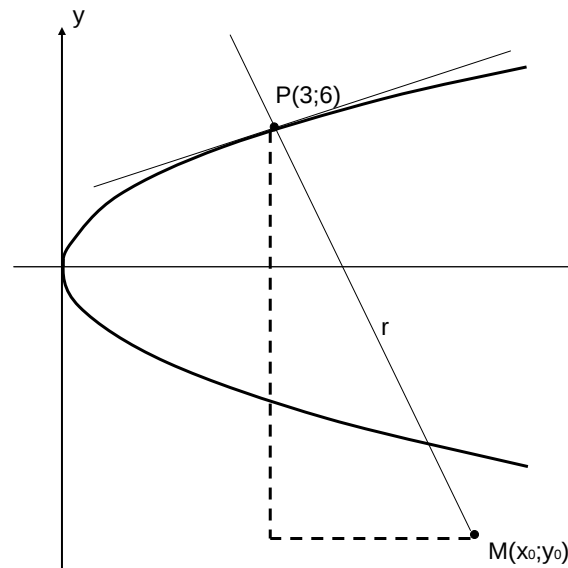
$$K = \frac{y''(x)}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-\frac{1}{6}}{(1+1)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{6 \cdot \sqrt{8}} = -\frac{\sqrt{2}}{24}$$

הנגזרת השניה היא שלילית זה אומר כי הקשת היא קמורה.

$$r = \frac{1}{|K|} = \frac{24}{\sqrt{2}} \approx 17$$

נחשב את רדיוס העקמומיות

נצייר את הגרף $y^2 = 12x$



נמצא את מרכז המעגל. שיפוע הנורמל הוא $-\frac{1}{m}$

m היא הנגזרת הראשונה של הפונקציה $m=1$ לכן שיפוע הנורמל יהיה -1 .

הנורמל העובר בנקודת ההשקה ובמרכז המעגל יהיה

$$(1) \frac{y_M - y_P}{x_M - x_P} = -1$$

$$(2) (y_M - 6)^2 + (x_M - 3)^2 = r^2 \quad \text{כמו כן (ראה קוים מרוסקים)}$$

נציב ב(1) את נקודת ההשקה ונקבל $y_M - 6 = -1(x_M - 3)$

$$(y_M - 6)^2 = (x_M - 3)^2 \quad \text{נעלה בריבוע}$$

$$(x_M - 3)^2 + (x_M - 3)^2 = r^2 = 288 \quad \text{נציב זאת ב (2) ונקבל}$$

$$(x_M - 3)^2 = 144$$

$$x_M - 3 = \pm 12$$

$$y_M - 6 = -12 \rightarrow y_M = -6 \quad \text{מכאן} \quad x_M = 15 \quad \text{ונמצא את}$$

מאחר והקשת קמורה ניקח את ה-6 מרכז המעגל יהיה $M(15; -6)$

$$2. \text{ נתונה הפונקציה } y^2 = x^4(4+x)$$

מצא את רדיוס העקמומיות ואת מרכז מעגלו בנקודה $P(-3; 9)$.

$$2yy' = 4x^3(4+x) + x^4 \quad \text{נגזור לפי פונקציה סתומה}$$

(1)

$$y' = \frac{4x^3(4+x) + x^4}{2y} = \frac{5x^4 + 16x^3}{2y} = \frac{x^3(16+5x)}{2y} \quad \text{מכאן}$$

$$2(y'y' + yy'') = 12x^2(4+x) + 4x^3 + 4x^3 \quad \text{נגזור פעם שניה את (1)}$$

$$2y'^2 + 2yy'' = 8x^3 + 12x^3 + 48x = 20x^3 + 48x^2$$

$$y'' = \frac{20x^3 + 48x^2 - 2y'^2}{2y} \quad \text{מכאן}$$

נציב את ערכי הנקודה P ונקבל

$$y' = \frac{(-3)^3(16-15)}{2 \cdot 9} = -\frac{3}{2}$$

$$y'' = \frac{20 \cdot (-3)^3 + 48 \cdot (-3)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^2}{2 \cdot 9} = -6.25$$

$$K = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-6.25}{5.86} = -1.07 \quad \text{נחשב את K}$$

$$r = \frac{1}{|K|} = 0.93 \quad \text{נחשב את r}$$

$$m = 0.666 \quad \text{ראינו} \quad y' = -1.5 \quad \text{לכן שיפוע הנורמל יהיה}$$

$$(y_M - 9)^2 + (x_M + 3)^2 = 0.93^2 \quad | \quad y_M - 9 = 0.666[x_M - (-3)]$$

ומשתי המשוואות נקבל את $(x_m; y_m)$ מרכז המעגל

$$(x_m + 3) = \frac{0.93^2}{1.443} = 0.6 \Rightarrow x_{m1} = -3.744; x_{m2} = -2.226$$

נמצא את y הנגזרת השניה ראינו (-) $y_{m1} = 8.5, \dots, y_{m2} = 10.84$

לכן הפונקציה קמורה ומכאן מרכז המעגל נמצא ב $M(-3.774; 8.5)$