

פונקציה סתומה

פונקציה סתומה היא מהצורה $f(x, y) = 0$

לדוגמא $3y - 2x + 5 = 0$

בצורה מפורשת הפונקציה תיכתב $y = \frac{2x - 5}{3}$

גזירה של פונקציה סתומה אפשרית בשני אופנים.

א. להעביר אותה לצורה מפורשת ולגזור

ב. לגזור לפי 2 משתנים כאשר על y מסתכלים כעל פונקציה של x

דוגמאות:

1. נתונה הפונקציה $3y - 2x + 5 = 0$

הגזירה $3 \frac{dy}{dx} - 2 = 0$ כאשר $y' = \frac{dy}{dx}$

ומכאן מקבלים $y' = \frac{2}{3}$

2. נתונה הפונקציה $xy - 3x + 2y - 4 = 0$ נראה את הנגזרת

נגזור את האיבר הראשון לפי מכפלת 2 משתנים (u, v)

$$1 * y + y' * x - 3 + 2y' = 0$$

$$y'(x + 2) = 3 - y$$

$$y' = \frac{3 - y}{x + 2}$$

אנו רואים שהנגזרת מכילה את y (במונה).

העבר לצורה מפורשת וגזור.

3. מצא את הנגזרת הראשונה והשניה של $x^2y + 3y - 4 = 0$

כאשר $x = -1$.

נמצא קודם את ערכו של y כאשר $x = -1$ ע"י הצבת x

$$(-1)^2 y + 3y - 4 = 0$$

$$y(1+3) = 4$$

$$y = \frac{4}{4} = 1$$

קבלנו את הנקודה $P(-1;1)$ נגזור

$$2x * y + y' * x^2 + 3y' = 0$$

$$y'(x^2 + 3) = -2xy$$

$$y' = -\frac{2xy}{x^2 + 3}$$

$$y' = -\frac{2 * (-1) * 1}{(-1)^2 + 3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{נציב את ערכי הנקודה P ונקבל}$$

על מנת לקבל את הנגזרת השניה נגזור את הנגזרת הראשונה

$$2x * y + y' * x^2 + 3y' = 0 \quad \text{קבלנו בגזירה הראשונה}$$

$$2y + y' * 2x + 2xy' + y'' * x^2 + 3y'' = 0$$

$$y''(x^2 + 3) = -(2y + 4xy') \quad \text{נגזור שוב}$$

$$y'' = \frac{-(2y + 4xy')}{x^2 + 3}$$

נציב את ערכי הנקודה P ואת y' שקבלנו בנקודה זו

$$y'' = \frac{-(2y + 4xy')}{x^2 + 3} = \frac{-(2 * 1 + 4 * (-1) * \frac{1}{2})}{(-1)^2 + 3} = \frac{0}{4} = 0 \quad \text{ונקבל}$$

הנגזרת השניה בנקודה זו היא 0.

4. נתונה הפונקציה $y = (1-5x)^6$ מצא את הנגזרת הראשונה והשניה.

$$\frac{dy}{du} = 6u^5 \quad \text{ואת} \quad \frac{du}{dx} = -5 \quad \text{נגזור את} \quad y = u^6 \quad \text{לכן} \quad u = (1-5x) \quad \text{נציב}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

$$y' = 6u^5 * (-5) = 6(1-5x)^5 (-5) = -30(1-5x)^5$$

ולפי חוק השרשרת

נגזור פעם נוספת $y'' = -150(1-5x)^4(-5) = 750(1-5x)^4$

5. נתון $x^2 + y^2 = 25$ (זה מעגל)

מצא את השיפועים בנקודות $x_1=3$ ו $x_2=5$..

נמצא את ערך הפונקציה (y) בנקודות ע"י הצבה

$$x_1 = 3 \rightarrow y_1 = \sqrt{25 - 3^2} = \pm 4 \quad x_2 = 5 \rightarrow y_2 = \sqrt{25 - 5^2} = 0$$

$$2x + 2y \cdot y' = 0$$

$$y' = -\frac{x}{y}$$

נגזור ונקבל

נבדוק כאשר $x=3$: $y = \pm 4$

וערך הנגזרת $y = +4 \rightarrow y_1' = -\frac{3}{4}$ $y = -4 \rightarrow y_1' = -\frac{3}{-4} = \frac{3}{4}$

נראה את הגרף .

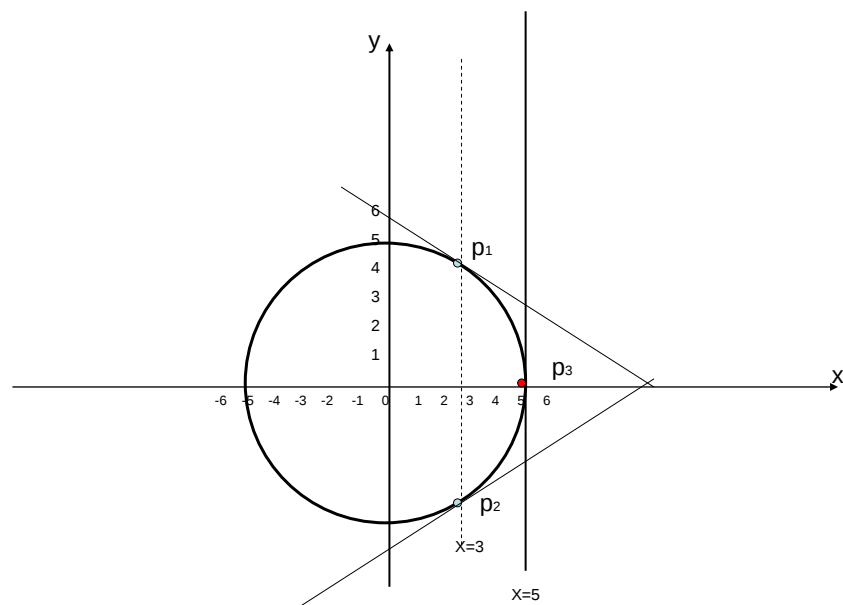
$$P_1(3;4)$$

$$P_2(3;-4)$$

הגרף הוא מעגל ונמתח את המשיקים בנקודות

$$p_3(5;0)$$

וכן נמתח את המשיק בנקודה



$$y' = -\frac{x}{y} = -\frac{5}{0} \quad p(5;0) \quad \text{נחשב עכשיו את הנגזרת בנקודה}$$

בנקודה זו אנו רואים שמכנה יש **אפס** זה אומר שאין לנו נגזרת בנקודה אף על פי שהפונקציה רציפה בנקודה. (ראה עמוד 11).
המשיק בנקודה זו הוא אנכי לציר x זאת אומרת שהשיפוע הוא 90° ואז הנגזרת (ה $\tan$) היא אינסופית. לכן במכנה של הנגזרת יש 0.

ראינו עד כה את הנגזרת, נראה כיצד נוכל להיעזר בה בהבנת הפונקציה.

$$y = x(x+1)(x-2)(x-5) \quad \text{ניקח פונקציה}$$

נקודות החיתוך שלה עם ציר ה x ($y=0$) ידועות

$$x_1 = 0 \quad x_2 = -1 \quad x_3 = 2 \quad x_4 = 5$$

נכתוב את הפונקציה בצורת פולינום

$$\begin{aligned} y &= x(x+1)(x-2)(x-5) = \\ &= (x^2 + x)(x^2 - 6x + 10) = \\ &= x^4 - 7x^3 + 10x^2 + x^3 - 7x^2 + 10x \\ y &= x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 10x \end{aligned}$$

נראה את הנגזרות בנקודות החיתוך עם ציר ה x.

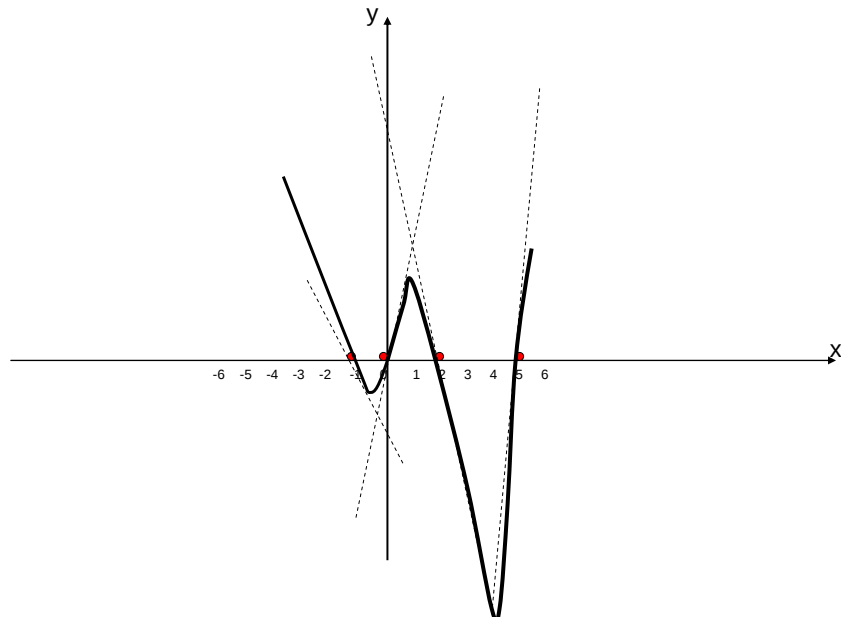
$$y' = 4x^3 - 18x^2 + 6x + 10$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = -1 \quad x_3 = 2 \quad x_4 = 5 \quad \text{נציב את הנקודות}$$

$$y_1' = +10 \quad y_2' = -18 \quad y_3' = -18 \quad y_4' = +190 \quad \text{ונקבל}$$

כשהנגזרת חיובית בנקודה זה אומר ששיפוע המשיק בנקודה הוא חיובי והזווית היא בין 0° ל 90° כלומר הפונקציה בנקודה **עולה** וכשהנגזרת שלילית בנקודה זה אומר ששיפוע המשיק הוא שלילי והוא בין 90° ל 180° והפונקציה **יורדת**.

על סמך הנתונים האלו נראה את הגרף.
 ראשית נסמן את נקודות החיתוך ואת המשיקים בנקודות (קווים
 מרוסקים). לפי ערך הנגזרת בנקודה אנו יודעים את השיפוע.



אם נסתכל על התחום $0 \leq x \leq 2$ ב-0 הפונקציה עולה וב 2 הפונקציה יורדת, מאחר והפונקציה רציפה הרי שבתוך התחום הזה באיזו שהיא נקודה הפונקציה צריכה להשתנות מעולה ליורדת. ניקח נקודה כלשהיא בתחום נניח $x=1$ ונמצא את ערך ה- y . בנקודה זו $y=8$ ועל פי זה אנו מעריכים את התנהגות הפונקציה בתחום זה, ואם כך נעשה בכל התחומים ונוכל לשער כיצד תיראה הפונקציה. וכך לצייר את הגרף.

אם ניקח את $2 \leq x \leq 5$ בנקודה $x=2$ הפונקציה יורדת וב $x=5$ הפונקציה עולה. לכן באיזו שהיא נקודה בתוך תחום זה יהיה שינוי של הפונקציה. ניקח באופן שרירותי $x=3$ אשר בתחום נציב בפונקציה ונקבל $y=-206$ ומכאן אנו משערים כיצד הפונקציה מתנהגת בתחום.