

בניית מודלים להמחשת פתרונות
יצירתיים בנושא של בעיות ערך קיצון

עבד אל סאלם סעאבנה

מטרות

- להגיע אל התלמידים שאהבו מתמטיקה ולא הצליחו להבין.
- להגיע אל התלמידים שהתאמצו להתחבר למתמטיקה ולא מצאו את נקודת ההקשר (אחיזה).
- להגיע אל עמיתינו המורים אשר מחפשים דרכים נוספות שיגרמו לתלמידים להתאהב במתמטיקה.
- להגמיש את שרירי המוח המתמטי של התלמידים ולאלץ אותם לחשוב בדרכים בלתי שגרתיות.
- שבירת התפיסה שיש רק פתרון אחד שאותו "המורה יסביר".
- מטרתנו להציג בפני התלמידים שאלה שיש לה יותר משיטה אחת לפתרון, התלמיד יגלה באופן עצמאי את הפתרון ע"י שימוש בדגם או מודל מתאים.

אמירות

"אני שומע ושוכח, אני רואה וזוכר, אני עושה ומבין".
פתגם סיני.

"בעולם לא קורה שום דבר שאין לו משמעות של מקסימום או מינימום כלשהו". ל.אווילר

"את רוב הבעיות המעשיות ניתן לצמצם לבעיות של הערכים הגדולים ביותר והקטנים ביותר, רק התרת בעיות אלו מאפשרת לספק את הדרישות המעשיות החותרות תמיד אל הטוב ביותר, המועיל ביותר"
פ.ל.צ'בישב

"..האדם שואף להגיע אל המהות העיקרית"
ב.ל.פאסטרנק

"המתמטיקה אוצרת בתוכה לא רק אמת אלא גם יופי נעלה ...
כזה שרק הגדולה שבאומנויות יכולה להציג." ב.ראסל

"לפי לייבניץ, עולמנו הוא הטוב ביותר מבין כל העולמות
האפשריים ולכן ניתן לתאר את חוקיו בעזרת עקרונות
אקסטרמאליים."
ק.זיגל

"ברגע שגודל נעשה מקסימאלי או מינימלי, הוא אינו זורם – לא
קדימה ולא אחורה"
ניוטון

- **רקע תרבותי והיסטורי ומדעי של תופעת הטבע בבעיות קיצון :**

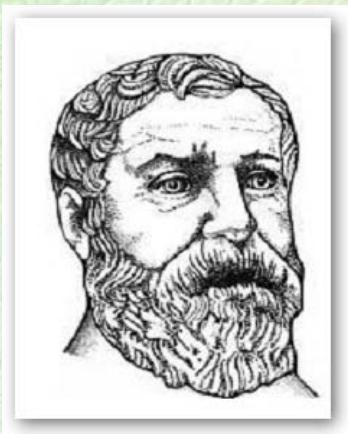
- **א. הבעיה הקדומה ביותר - בעיית דידו :**

לפי המסורת הרומית המשוחזרת שהתרחשה במאה התשיעית לפנה"ס, הנסיכה הפניקית דידו, יצאה מערבה לחפש מקלט מרדיפותיו של אחיה לאורך חופי הים התיכון, על שפת מפרץ תוניס מצאה מקום שמצא חן בעיניה, דידו ביקשה להינשא למנהיג המקומי שימכור לה חלק מאדמת המקום, בקשתה נראתה צנועה מאוד: " שטח שניתן להקיף בעורו של שור".

- העסקה הושלמה ואז חתכה דידו את עור השור לרצועות צרות, קשרה אותן זו אל זו והקיפה שטח גדול שעליו הקימה מבצר ובסביבתו את העיר קרתאגו.

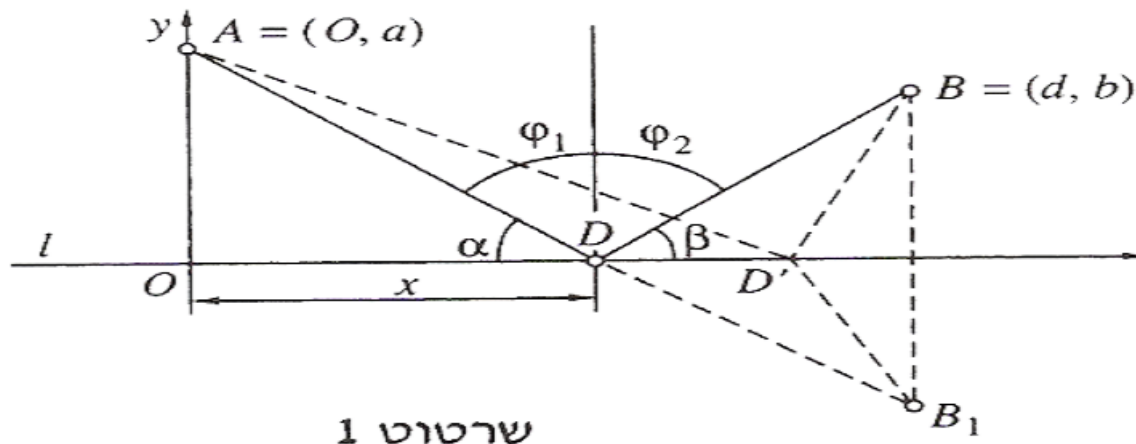
- מסיפור זה עולה השאלה:
- מהו גודלו של שטח אדמה אותו ניתן להקיף בעורו של שור?
- במתמטיקה של זמננו נציג שאלה זאת כך:
- בין כל העקומים המישוריים הסגורים בעלי אורך נתון, יש למצוא את העקום המקיף את השטח המקסימאלי.

ב. בעיית מקסימום ומינימום בגיאומטריה
(בעיית הרוח):

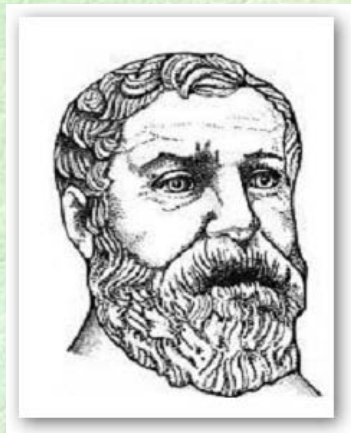


• ניסוח בעיית הרוח:

- נתונות שתי נקודות A, B באותו צד של הישר l . יש למצוא נקודה D על הישר כך שסכום המרחקים AD ו- BD יהיה הקטן ביותר?



ב. בעיית מקסימום ומינימום בגיאומטריה
(בעיית הרון):



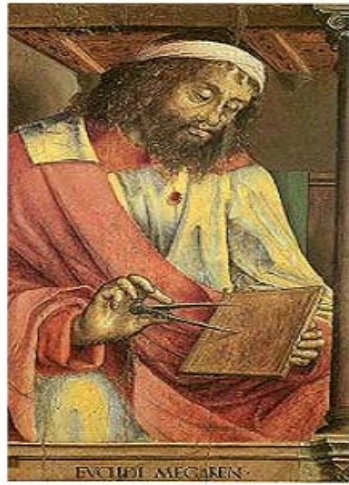
- ניתן להציג בעיית הרון כבעיה מציאותית:
הישר A | הופך אז לקטע של מסילת ברזל, הנקודות A | B לערים המרוחקות ממסילת הברזל והנקודה D לתחנת רכבת. נשאלת השאלה:
- באיזה מקום יש לבנות את התחנה כך שסכום האורכים של שני כבישים ישרים המקשרים אותה עם כל אחת מהערים יהיה מינימאלי?

ג. בעיית מקסימום ומינימום בטבע – אופטיקה (סנל) :

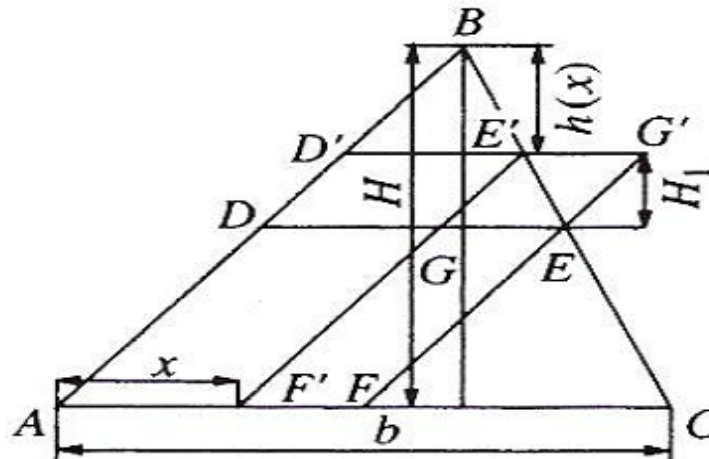


- ניסוח בעיית הקיצון במדויק :
- תהיינה A ו-B שתי נקודות נתונות בשני צדדיו של ישר אופקי | המפריד בין תווך עליון ותווך תחתון, v_1, v_2 הן בהתאמה מהירות האור בתווך התחתון ובתווך העליון. יש למצוא נקודה D על הישר | כך, שזמן התנועה של קרן אור במסלול ADB יהיה מינימאלי.
- סנל היה הראשון שגילה החוק שהוכח ע"י הויגנס .

ד. בעיית מקסימום ומינימום בגיאומטריה (בעיית אוקלידס):



- בספר היסודות של אוקלידס הופיעה רק בעיית מקסימום אחת, **שניסוחה המודרני הוא:**
- נתון משולש ABC . יש לחסום בו מקבילית $ADEF$ בעלת השטח הגדול ביותר.



ה. משפט פרמה בתורת הקיצון:

- **משפט פרמה :**
- תהי פונקציה $f(x)$ גזירה בנקודה x , אם x היא נקודת קיצון (מקסימום או מינימום) מקומי של הפונקציה f אזי $f'(x) = 0$.
- השוויון $f'(x) = 0$ הינו רק תנאי הכרחי לקיצון.

ה. משפט פרמה בתורת הקיצון:

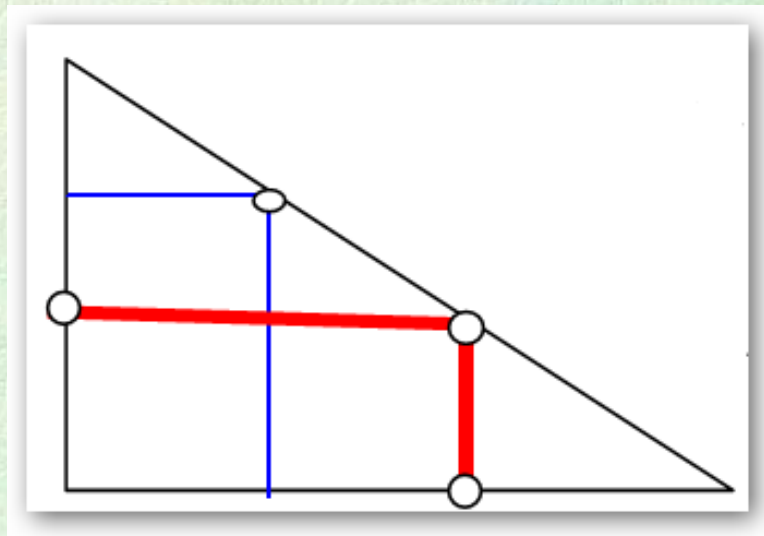
- ממשפט פרמה נבע האלגוריתם שאותו אנו מלמדים בבתי הספר למציאת פתרונות לבעיות הקיצון:
- קביעת המשתנים ומציאת קשר ביניהם לפי נתוני הבעיה.
- הצגת פונקצית המטרה של הבעיה בעזרת המשתנים שנקבעו בשלב 1.
- גוזרים את הפונקציה ומשווים לאפס, ופותרים את המשוואה $f' = 0$, הנקודות המתקבלות הן הנקודות החשודות לקיצון, בודקים את הנקודות בעזרת אחת משלושת הדרכים הבאות:
 - ע"י בדיקת סימן הנגזרת $f'(x)$ בסביבת הנקודות החשודות.
 - ע"י בדיקת ערכה של הפונקציה $f(x)$ בסביבת הנקודות החשודות.
 - ע"י בדיקת הסימן של הנגזרת השנייה $f''(x)$ בנקודות החשודות.
- בודקים את ערכי הפונקציה $f(x)$ בקצוות התחום לקביעת המקסימום המוחלט ו/או המינימום המוחלט.

מודל ההמחשה

- שאלות והרהורים שהביאו ליצירה. @
- כיצד עונה מודל ההמחשה על הקושי העיקרי בהבנת הנושא. @
- נושאים נוספים למחשבה (התלבטויות):
- איזה צורה הנדסית כדאי לבנות ? איך לבנות הדגם ?! ממה לבנות אותו?? מאיזה חומר ?? - קרטון , מתכת , פלסטיק , עץ.
- איך אפשר לעשות אותו קל לנשיאה?? איך לעשות אותו תקף להרבה בעיות ?! איך אפשר לשנות את המידות בו בלי לקלקל אותו ?!.

דגם ראשוני (התחלתי, ניסיוני):

- את הדגם ההתחלתי בניתי מחוטי חשמל, אחרי שהחלטתי שזה יהיה משולש שחוסם מלבן, ובכן בניתי משולש ובתוכו חסמתי חוט בנייה עם טבעות מתכת קטנות המאפשרות לחוט לזוז.
- הבניה לא הייתה כל כך קשה, קשרתי את הזוויות שלו בידוהכנסתי את החבל והתחלתי לשחק בו, והנה בידי דגם "מפואר".



הדגם המשופר

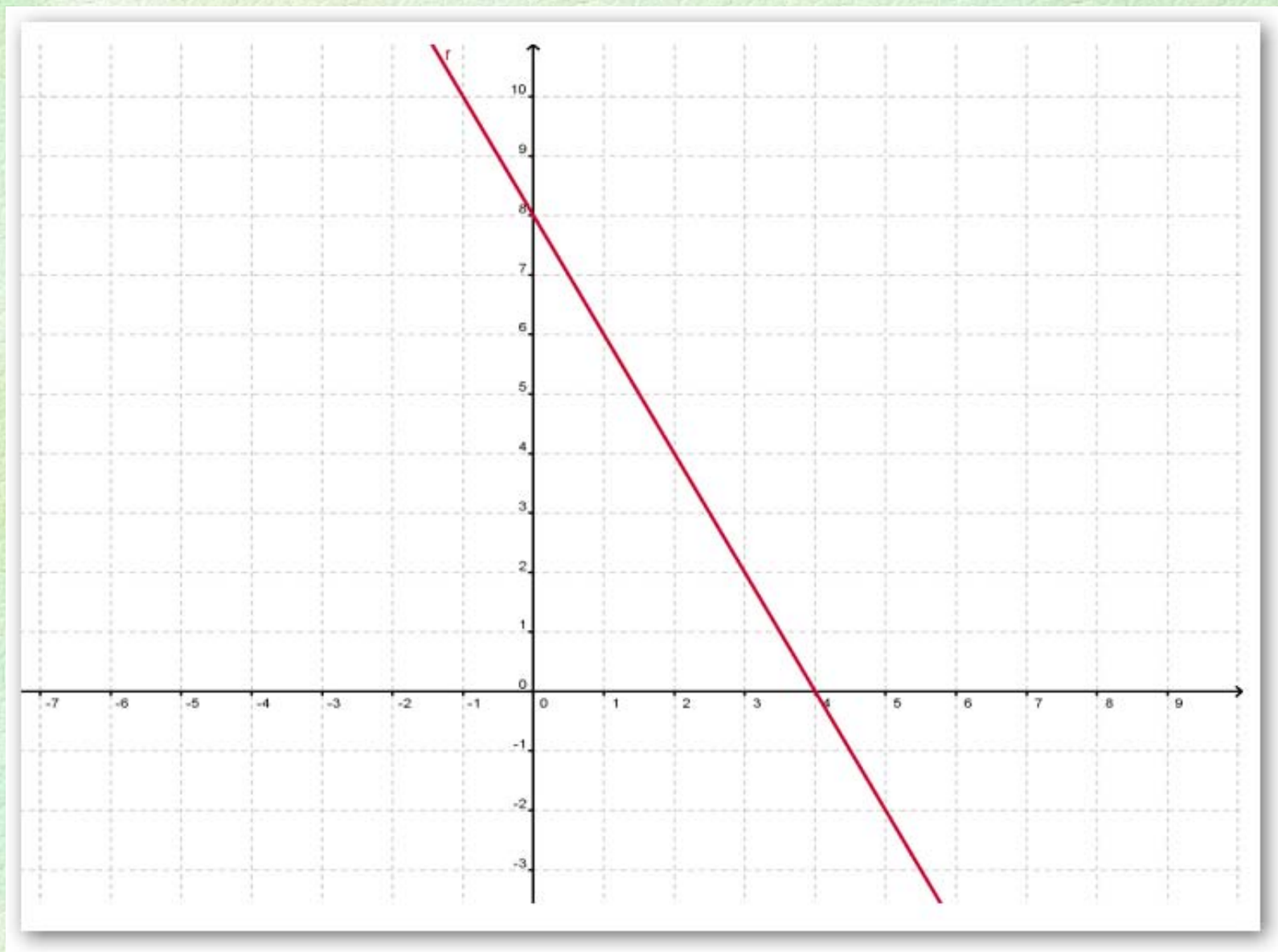
- הרהורים נוספים נתנו לי לסכם את התכונות של הדגם המשופר:
- הדגם צריך להיות :
- לא מסוכן לשימוש... בטיחות דבר בסיסי נשפף את הזוויות כדי שלא יהיה חדות .
- קל לנשיאה... אז צריכים עץ קל וחזק, ואורך הצלעות שלו עד 50 ס"מ .
- מתקפל ... אפשר לעשות אותו עם ברגים זזים בזוויות הבסיס, וזווית הראש חופשית לזוז.
- מתאים לבעיות שונות... אפשר שאחד הצדדים שלו יהיה מחיק, ואז אפשר לשנות את המימדים כרצוננו .

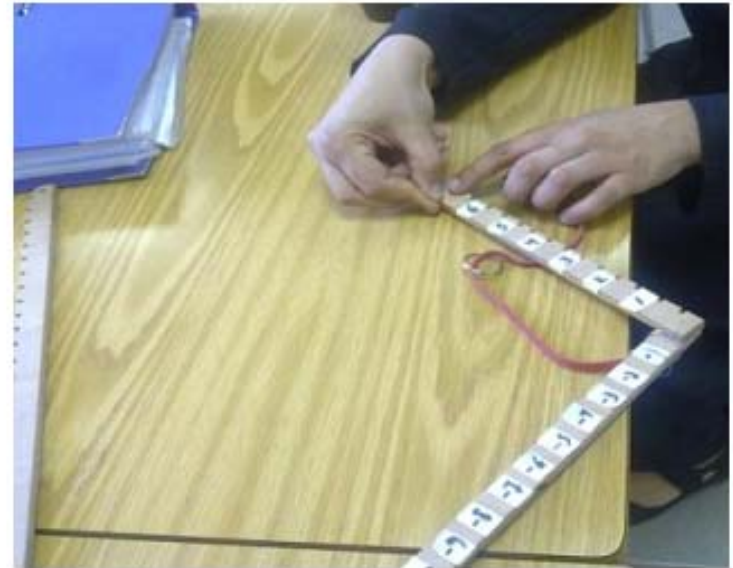
הדגם המשופר

- החוט של המלבן צריך לזוז בחופשיות... אפשר להשתמש בטבעת (מפתחות) כל אחד על צלע (ראה דגם 1).
- איך לא יחליקו האסימונים... נעשה חריצים בשתי הצלעות העומדות (היתר והניצב) שהמרווח בין כל חריץ וחריץ יהיה 2 ס"מ על הניצב, ושורש $8 = 2.83$ ס"מ בין החריצים על היתר.
- ואיך אפשר שיעמוד בפני עצמו... צריכים לחשוב על מעמד או רגליים יציבות.

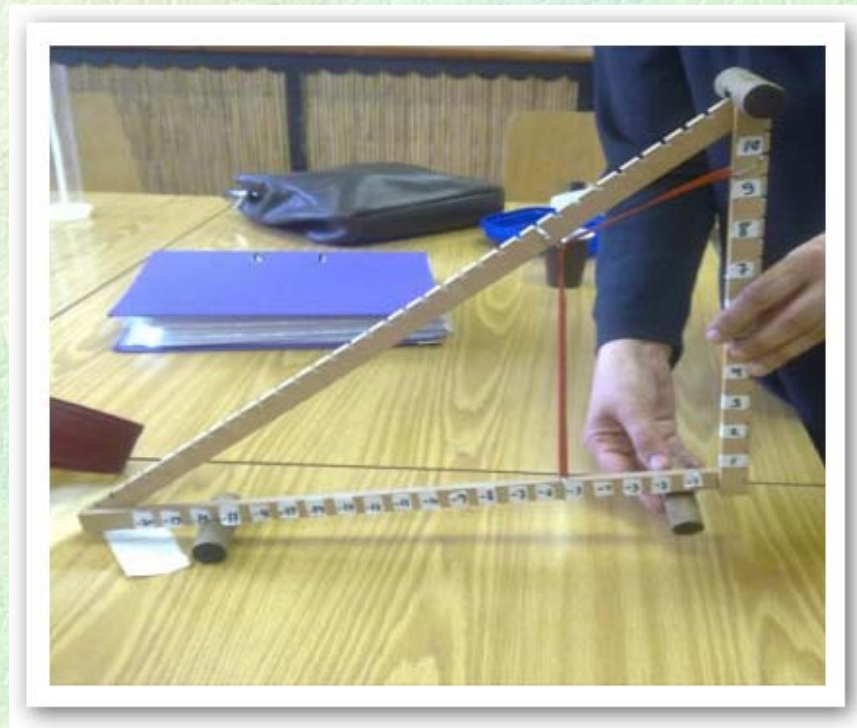
בניית המודל הלכה למעשה והצגת הבעיה כשאלה

- ובכן הנה השאלה:
- " על גרף הישר $y = 8 - 2x$ בוחרים נקודה p ברביע הראשון (?השני?), ומורידים ממנה אנכים לצירים כך שנוצר מלבן.
- מה צריכים להיות השיעורים של הנקודה p כדי ששטח המלבן יהיה מקסימאלי?"



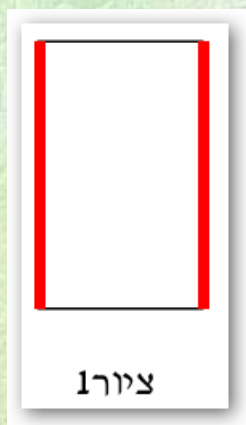


- מהצד השני של הדגם הדבקתי סרט סלוטיף צבעוני מחיק, על שני הניצבים כדי שיהיה זמין לשאלות אחרות מאותו סוג .
- ניתן כמובן להפוך את המשולש אם נרצה שהבעיות יהיו ברביעים 3 ו- 4 וגם לשנות את כיוונו אם תהיה לנו פונקציה יורדת .



דגם השקף לבעיות נפח

- ניתן להשתמש בו כשיעור פתיחה לנושא בעיות קיצון. התלמידים יכולים לבנות אותו בעצמם תוך שימוש באותו שקף אבל בצורה שונה.



• שלבי הביצוע :

- לקחת שני שקפים שווים בגודלם,
- על השקף הראשון להדביק סקוטש
- לאורך (ראה ציור 1).

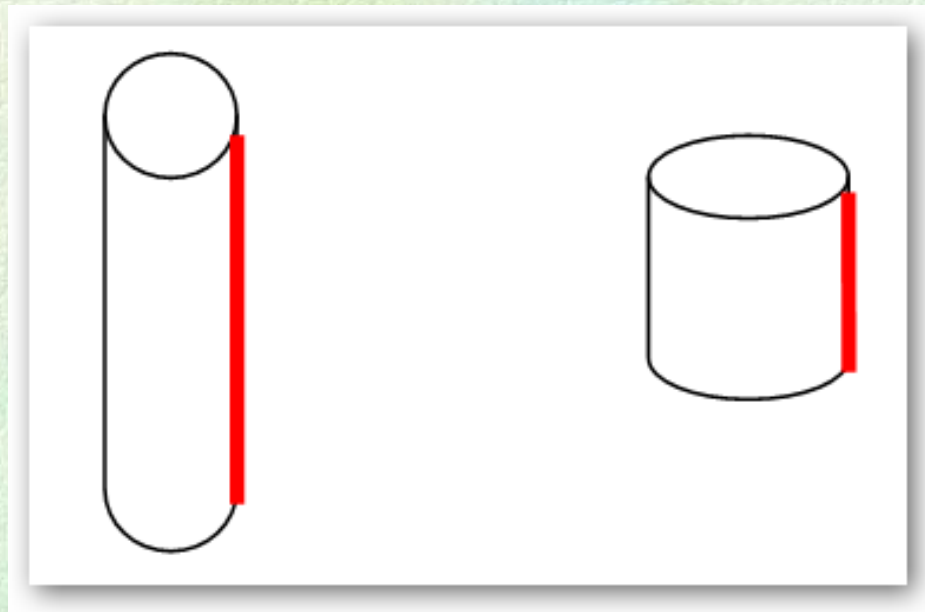


- ועל השקף השני הדבקנו סקוטש לרוחב (ראה ציור 2).

- ומשני השקפים להכין שני גלילים ששטח המעטפת שלהם שווה.

- המלצה:

- לשים את שני השקפים אחד מעל השני לפני הגלגול כדי שיאמינו התלמידים שאכן הם שווים .



ההדגמה

- מכינים פופקורן, גרעינים, ביגלי או כל דבר דומה, ושואלים את התלמידים מי יכיל יותר פופקורן, האם הרוחב קובע או האורך או שזה לא משנה בגלל השטח השווה ולאחר דיון מבצעים הדגמה, ממלאים את הגליל הארוך ואז שופכים לרחב ורואים שהאחרון לא התמלא, מה שמעיד שהנפח שלו יותר גדול.



סיכום

- עבודה בשיטה זו עשויה לתרום להעלאת ההנעה (מוטיבציה) בקרב המורים והתלמידים, לפיתוח החשיבה המתמטית ולשינוי הדימוי של המקצוע, הרי ששיטת **החקר** והגילוי מסייעת ליצירת חיבור טבעי בין תחומים שונים של המתמטיקה שלא כמו בשגרת ההוראה אשר במהלכה מתבצעת הפרדה מלאכותית בין התחומים, הדגמים שיצרנו מסייעים לתלמידים לראות דברים באור חדש, להקנות להם **הבנה** עמוקה יותר לגבי קשרים פנימיים הקיימים בין אובייקטים מתמטיים ובין תופעות מתמטיות, שימוש בדגם מעודד אותם ליצור רעיונות חדשים ומקוריים.

- אנו רואים שתלמידים רבים אינם מבינים את משמעותה של בעיה כלשהי גם לאחר שהצליחו להתמודד עימה בהצלחה, לאור זאת, נוכל לומר שתפקידו של המורה לא רק ללמד את התלמידים איך לשלוט שליטה מלאה בטכניקות השונות לפתרון בעיות, אלא יחד עם זאת ניתן לבצע התרגיל כך שבמהלכו ילמדו התלמידים עובדות מתמטיות חדשות ומפתיעות, ובכן, תפקידו של המורה הוא לזמן סיטואציות בעלות פוטנציאל להעלות שאלות מעניינות ע"י התלמידים ויצירת סביבת למידה המאפשרת לתלמידים לחקור בעיות, להתמודד עם הבעיות ולעסוק בפתרון באופן יעיל, מצליח ומהנה.

- שיטת חקר זו הינה **מהנה** ומספקת **ביטחון עצמי** לנו כמורים וגם לתלמידינו, עצם ההשתתפות האמיתית עם תלמידינו בתהליך הלמידה הופכת הן את ההוראה והן את הלמידה למשהו **מרתק** ודינאמי.

- מה שנשאר לנו כמורים הוא להתגבר על בעיית **המוגבלות בזמן** שיש לנו כמורי תיכון ולהראות לתלמידים את היופי הטמון במבנים המתמטיים, להרחיב את הידע המתמטי שלהם וללמד אותם לאהוב המתמטיקה.