פתרון משוואות טריגונומטריות

חלק א': משוואות בסיסיות:

1. משוואה מהצורה $\sin x = \sin\alpha$ ← **הפתרון הכללי:** $\begin{cases} X_1 = \alpha + 360^0 k \\ X_2 = 180^0 - \alpha + 360^0 k \end{cases}$.

$k = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3\ldots$

כאשר k=0 נקבל את הפתרונות במחזור החיובי הראשון.
כאשר k=1 נקבל את הפתרונות במחזור החיובי השני וכך הלאה.
כאשר k=-1 נקבל את הפתרונות במחזור השלילי הראשון וכך הלאה.

דוגמאות:

א. $\boxed{\sin 5x = 0.8\left(=\sin 53.13^0\right)}$

$5x_1 = 53.13^0 + 360^0 k\ /:5$

$\underline{x_1 = 10.62^0 + 72^0 k}$

$5x_2 = 126.87^0 + 360^0 k$

$\underline{x_2 = 25.37^0 + 72^0 k}$

ב. $\boxed{\sin\left(3x + 20^0\right) = \sin x}$

$3x + 20^0 = x + 360^0 k$

$2x = -20^0 + 360^0 k\ /:2$

$\underline{x_1 = -10^0 + 180^0 k} \Rightarrow \underline{x_1 = 170^0 + 180^0 k}$

$3x + 20^0 = 180^0 - x + 360^0 k$

$4x = 160^0 + 360^0 k\ /:4$

$\underline{x_2 = 40^0 + 90^0 k}$

הערה: אם הפיתרון הכללי יוצא שלילי (לדוגמא X_1 בדוגמא ב'), אפשר לרשום את הפיתרון הכללי כשמתחילים מהפתרון החיובי הראשון וזאת ע"י כך שמוסיפים לפיתרון השלילי את המחזור של הפתרון. בדוגמא: ל -10^0 מוסיפים 180^0, שזהו המחזור של הפיתרון ומקבלים 170^0.

2. משוואה מהצורה $\cos x = \cos\alpha$ ← **הפתרון הכללי:** $\begin{cases} X_1 = \alpha + 360^0 k \\ X_2 = -\alpha + 360^0 k \end{cases}$.

דוגמאות:

א. $\boxed{\cos 3x = \cos 130^0}$

$3x = \pm 130^0 + 360^0 k$

$\underline{x = \pm 43.33^0 + 120^0}$

ב. $\boxed{\cos\left(2x - 60^0\right) = \cos\left(3x + 10^0\right)}$

$2x - 60^0 = -3x - 10^0 + 360^0 k$

$5x = 50^0 + 360^0 k\ /:5$

$\underline{x_2 = 10^0 + 72^0 k}$

$2x - 60^0 = 3x + 10^0 + 360^0 k$

$-x = 70^0 + 360^0 k\ /\cdot(-1)$

$\underline{x_1 = -70^0 + 360^0 k}$

$\Rightarrow \underline{x_1 = 290^0 + 360^0 k}$

הערה: כאשר יש צורך לכפול או לחלק את אגפי המשוואה במספר שלילי הסימן של המחזור של המשוואה יישאר תמיד חיובי.

3. משוואה מהצורה $\begin{cases}\tan x=\tan\alpha\\ \cot x=\cot\alpha\end{cases}$ ← **הפתרון הכללי:** $x=\alpha+180^0k$.

דוגמא:

$\boxed{3\tan\left(2x+10^0\right)=6\sqrt{3}}\ /:3$

$\tan\left(2x+10^0\right)=2\sqrt{3}$

א. $\tan\left(2x+10^0\right)=\tan 73.9^0$

$2x+10^0=73.9^0+180^0k$

$2x=63.9^0+180^0k\ /:2$

$\underline{x=31.95^0+90^0k}$

סיכום המקרים + מקרים פרטיים:

משוואה	פתרון\ות
$\sin X=\sin\alpha$	$X_1=\alpha+360^0k$ $X_2=180^0-\alpha+360^0k$
$\sin X=-\sin\alpha$	$\sin X=\sin\left(-\alpha\right)$ פותרים לפי המשוואה הקודמת עם זווית שלילית.
$\sin X=0$	$X=180^0k$
$\sin X=1$	$X=90^0+360^0k$
$\sin X=-1$	$X=-90^0+360^0k$
$\cos X=\cos\alpha$	$X_1=\alpha+360^0k$ $X_2=-\alpha+360^0k$
$\cos X=-\cos\alpha$	$\cos X=\cos\left(180-\alpha\right)$ פותרים לפי המשוואה הקודמת עם זווית המשלימה ל-180.
$\cos X=0$	$X=90^0+180^0k$
$\cos X=1$	$X=360^0k$
$\cos X=-1$	$X=180^0+360^0k$
$\tan X=\tan\alpha$	$X=\alpha+180^0k$
$\tan X=-\tan\alpha$	$\tan X=\tan\left(-\alpha\right)$ פותרים לפי המשוואה הקודמת עם זווית שלילית.
$\cot X=\cot\alpha$	$X=\alpha+180^0k$
$\cot X=-\cot\alpha$	$\cot X=\cot\left(-\alpha\right)$ פותרים לפי המשוואה הקודמת עם זווית שלילית.

חלק ב: שיטות עבודה לפיתרון משוואות טריגונומטריות מורכבות

1. משוואות מהצורה $\sin^2 x = a\ ,\ \cos^2 x = a$

משתמשים בנוסחאות:

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$$

דוגמאות:

$$\boxed{\sin^2 x = 0.64}$$

$$\frac{1-\cos 2x}{2} = 0.64$$

$$1-\cos 2x = 1.28$$

$$\cos 2x = -0.28$$

$$2x = \pm 106.26^0 + 360^0 k \ /:2$$

$$x = \pm 53.13^0 + 180^0 k$$

הדרך הנוספת לפתרון היא הוצאת שורש ריבועי לשני אגפי המשוואה ואז לפתור שתי משוואות פשוטות : Sinx = 0.8 ו- sinx = -0.8 בדרך זו נקבל 4 פתרונות כלליים.

2. פתירת משוואות הכוללות אותה פונקציה בשני האגפים:

דוגמאות: 1)

$$\boxed{\sin 3x + \sin 2x = 0}$$

$$\sin 3x = -\sin 2x$$

$$\sin 3x = \sin(-2x)$$

$$3x = -2x + 360^0 k$$

$$5x = 360^0 k$$

$$\underline{x_1 = 72^0 k}$$

$$3x = 180^0 + 2x + 360^0 k$$

$$\underline{x_2 = 180^0 + 360^0 k}$$

2)

$$\boxed{\cot 4x \cdot \cot(2x+30) = 1}$$

$$\cot 4x = \frac{1}{\cot(2x+30)}$$

$$\cot 4x = \tan(2x+30)$$

$$\cot 4x = \cot(60-2x)$$

$$4x = 60^0 - 2x + 180^0 k$$

$$6x = 60^0 + 180^0 k$$

$$\underline{x = 10^0 + 30^0 k}$$

חשוב לזכור כי:

א. $-\sin\alpha = \sin(-\alpha)$ ב. $-\tan\alpha = \tan(-\alpha)$ ג. $-\cot\alpha = \cot(-\alpha)$ ד. $-\cos\alpha = \cos(180^0 - \alpha)$

3. פתירת משוואות על ידי מעבר לאותה הפונקציה :

נוסחאות שימושיות למעבר לאותה הפונקציה :

א. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha = 1$ ב. $1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ ג. $1+\cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$ ד. $\tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha}$

ה. $\cos2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ ו. $\cos2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

דוגמאות: 1)

$$\boxed{\cos 2x = 10\cos^2\frac{x}{2} - 8}$$

$$2\cos^2 x - 1 = \cancel{10}\left(\frac{1+\cos x}{\cancel{2}}\right)$$

$$\cos x = t$$

$$2t^2 - 1 = 5 + 5t - 8$$

$$2t^2 - 5t + 2 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{5\pm3}{4} = \begin{cases} \cancel{x_1 = 2 = \cos x} & \Leftarrow -1\le\cos x\le1 \\ x_2 = \frac{1}{2} = \cos x & \Rightarrow x = \pm60^0 + 360^0 k \end{cases}$$

2)

$$\boxed{\cos^2 x + \sin x = 1}$$

$$1 - \sin^2 x + \sin x = 1$$

$$\sin x - \sin^2 x = 0$$

$$\sin x(1 - \sin x) = 0$$

$$\sin x = 0 \to \underline{x_1 = 180^0 k}$$

$$1 - \sin x = 0$$

$$\sin x = 1 \to \underline{x_2 = 90^0 + 180^0 k}$$

3)

$$\boxed{\sqrt{2}\cos^2 x + \sin x = 0}$$

$$\sqrt{2}\left(1-\sin^2 x\right) + \sin x = 0$$

$$\sin x = a$$

$$\sqrt{2}\left(1-a^2\right) + a = 0$$

$$\sqrt{2} - \sqrt{2}a^2 + a = 0 \to \sqrt{2}a^2 - a - \sqrt{2} = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{1\pm3}{2\sqrt{2}} = \begin{cases} \cancel{a_1 = \sqrt{2} = \sin x} \\ a_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin x \end{cases}$$

$$\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\left(-45^0\right)$$

$$x_1 = -45^0 + 360^0 k \to \underline{x_1 = 315^0 + 360^0 k}$$

$$x_2 = 180^0 + 45^0 + 360^0 k \to \underline{x_2 = 225^0 + 360^0 k}$$

4. פתירת משוואות על ידי פירוק לגורמים (הבאה למכפלות)

דוגמאות: 1)

$$\boxed{\sin^3 x + \cos^2 x + \sin x = 2}$$

$$\sin^3 x + 1 - \sin^2 x + \sin x = 2$$

$$\sin^3 x - \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$\sin^2 x(\sin x - 1) + (\sin x - 1) = 0$$

$$(\sin x - 1)\left(\sin^2 x + 1\right) = 0$$

$$(1.)\quad \sin^2 x + 1 \ne 0$$

$$(2.)\quad \sin x - 1 = 0$$

$$\sin x = 1 \to \underline{x = 90^0 + 360^0 k}$$

2)

$$\boxed{\sin^2 x - \sin x + \sin x\cdot\cos x = \cos x}$$

$$\sin^2 x - \sin x + \sin x\cdot\cos x - \cos x = 0$$

$$\sin x(\sin x - 1) + \cos x(\sin x - 1) = 0$$

$$(\sin x - 1)(\sin x + \cos x) = 0$$

$$(1.)\quad \sin x - 1 = 0 \to \sin x = 1 \to \underline{x_1 = 90^0 + 360^0 k}$$

$$(2.)\quad \sin x + \cos x = 0 \to \cos x = -\sin x$$

$$\cos x = \cos(90 + x)$$

$$x = \pm(90 + x) + 360^0 k$$

$$\cancel{x = 90^0 + x + 360^0 k}$$

$$x = -90^0 - x + 360^0 k$$

$$2x = -90^0 + 360^0 k$$

$$x = -45 + 180^0 k \to \underline{x = 135 + 180^0 k}$$

5. פתרון משוואות בעזרת נוסחאות לסכום והפרש שתי פונקציות

הנוסחאות:

$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$	$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$	$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

דוגמאות:

1)

$$\boxed{\sin x+\sin 3x=\cos x+\cos 3x}$$

$$\cancel{2}\sin 2x\cdot\cos x=\cancel{2}\cos 2x\cdot\cos x$$

$$\cos x\left[\sin 2x-\cos 2x\right]=0$$

$$(1.)\quad \cos x=0\rightarrow \underline{x_1=90^0+180^0k}$$

$$(2.)\quad \sin 2x-\cos 2x=0$$

$$\sin 2x-\sin\left(90-2x\right)=0$$

$$2\sin\left(2x-45^0\right)\cos 45^0=0$$

$$\sin\left(2x-45^0\right)=0$$

$$2x-45^0=180^0k$$

$$2x=45^0+180^0k$$

$$\underline{x_2=22.5^0+90^0k}$$

2)

$$\boxed{\sin^2 3x-\sin^2 x=\sin 2x}$$

$$\left(\sin 3x-\sin x\right)\left(\sin 3x+\sin x\right)=\sin 2x$$

$$\underline{2}\cdot\underline{\sin x}\cdot\underline{\underline{\cos 2x}}\cdot\underline{\underline{2}}\cdot\underline{\underline{\sin 2x}}\cdot\underline{\cos x}=\sin 2x$$

$$\underline{\sin 2x}\cdot\underline{\underline{\sin 4x}}=\sin 2x$$

$$\sin 2x\left[\sin 4x-1\right]=0$$

$$(1.)\quad \sin 2x=0\rightarrow 2x=180^0k$$

$$\underline{x_1=90^0k}$$

$$(2.)\quad \sin 4x-1=0$$

$$\sin 4x=1$$

$$4x=90^0+360^0k$$

$$\underline{x_2=22.5^0+90^0k}$$

3)

$$\boxed{\sin 3x+2\cdot\cos 4x\cdot\sin x=\frac{1}{2}}$$

$$\sin\left(4x-x\right)+2\cdot\cos 4x\cdot\sin x=\frac{1}{2}$$

$$\sin 4x\cdot\cos x-\sin x\cdot\cos 4x+2\cdot\cos 4x\cdot\sin x=\frac{1}{2}$$

$$\sin 4x\cdot\cos x+\sin x\cdot\cos 4x=\frac{1}{2}$$

$$\sin\left(4x+x\right)=\frac{1}{2}$$

$$\sin 5x=\frac{1}{2}=\sin 30^0$$

$$5x=30^0+360^0k\ /:5 \qquad\Big|\qquad 5x=150^0+360^0k$$

$$\underline{x_1=6^0+72^0k} \qquad\Big|\qquad \underline{x_2=30^0+72^0k}$$

6. פתירת משוואות מהצורה $a\sin(mx)+b\cos(mx)=c$ כאשר a,b - מקדמים מספריים.

דרך הפיתרון:

על מנת לפתור משוואה מסוג זה ישנם מספר שלבים:

1. חילוק המשוואה כולה ב- **a** או ב- **b**
(נדגים כאשר אנו מתייחסים לחלוקה **a**)
2. המרת $\frac{b}{a}$ לפונקציית $\tan$, ואותה להמיר ל- $\frac{\sin}{\cos}$.
3. לבצע מכנה משותף של ה- $\cos$.
4. על פי הנוסחא $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta\pm\cos\beta\cdot\sin\alpha$
להפוך את כל האגף השמאלי לפונקציה אחת,
ולהשוותה לאגף הימני (להפוכו למספרי).

$$\boxed{a\sin(mx)+b\cos(mx)=c}\ /:a$$

$$\sin(mx)+\frac{b}{a}\cos(mx)=\frac{c}{a}$$

$$\arctan\frac{b}{a}=\alpha\rightarrow\tan\alpha=\frac{b}{a}$$

$$\sin(mx)+\tan\alpha\cdot\cos(mx)=\frac{c}{a}\ /\cdot\cos\alpha$$

$$\cos\alpha\cdot\sin(mx)+\cos\alpha\cdot\cos(mx)=\frac{c}{a}\cdot\cos\alpha$$

$$\sin(mx+\alpha)=k$$

דוגמאות:

(1

$$\boxed{\sin x+2\cos x=2}$$

$$\tan\alpha=2\rightarrow\alpha=63.43^0$$

$$\sin x+\tan(63.43)\cdot\cos x=2\ /:\cos(63.43)$$

$$\sin x\cdot\cos(63.43)+\sin(63.43)\cdot\cos x=2\cos(63.43)$$

$$\sin(x+63.43)=0.8944$$

$$\sin(x+63.43)=\sin 63.43$$

$$(1.)\quad x+\cancel{63.43^0}=\cancel{63.43^0}+360^0k$$

$$\underline{x_1=360^0k}$$

$$(2.)\quad x+63.43^0=180^0-63.43^0+360^0k$$

$$\underline{x_2=53.13^0+360^0k}$$

(2

$$\boxed{4\sin x+3\cos x=4}$$

$$4\sin x+3\cos x=4\ /:3$$

$$\frac{4}{3}\sin x+\cos x=\frac{4}{3}$$

$$\tan\alpha=\frac{4}{3}\rightarrow\alpha=53.13^0$$

$$\tan(53.13^0)\cdot\sin x+\cos x=\frac{4}{3}\ /\cdot\cos(53.13^0)$$

$$\sin(53.13^0)\cdot\sin x+\cos(53.13^0)\cdot\cos x=\frac{4}{3}\cos(53.13^0)$$

$$\cos(53.13^0-x)=0.8=\cos(36.87^0)$$

$$53.13^0-x=\pm36.87^0+360^0k$$

$$(1.)\quad 53.13^0-x=36.87+360^0k$$

$$-x=-16.26^0+360^0k$$

$$\underline{x_1=16.26^0+360^0k}$$

$$(2.)\quad 53.13^0-x=-36.87^0+360^0k$$

$$-x=-90^0+360^0k$$

$$\underline{x_2=90^0+360^0k}$$

(3

$$\boxed{3\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x=3\ /:3}$$

$$\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{3}\cos 2x=1\mapsto\frac{\sqrt{3}}{3}=\tan 30^0$$

$$\sin 2x-\tan 30^0\cos 2x=1$$

$$\sin 2x-\frac{\sin 30^0}{\cos 30^0}\cos 2x=1\ /\cdot\cos 30^0$$

$$\cos 30^0\cdot\sin 2x-\sin 30\cdot\cos 2x=1\cdot\cos 30^0$$

$$\sin(2x-30^0)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

פתירת משוואה מהצורה $a\sin(mx)+b\cos(mx)=c$ עם מקדמים $a=b=1$:
(מהצורה $\sin(mx)+\cos(mx)=c$)

$$\boxed{\sin 2x+\cos 2x=1.2}$$

$$\sin 2x+\sin\left(90^0-2x\right)=1.2$$

$$2\cdot\sin 45^0\cdot\cos\left(2x-45^0\right)=1.2\,/:2\sin 45^0$$

$$\cos\left(2x-45^0\right)=\frac{1.2}{2\sin 45^0}=0.8485$$

$$\cos\left(2x-45^0\right)=\cos\left(31.95^0\right)$$

$$2x-45^0=\pm 31.95^0+360^0k$$

$$(1.)\quad 2x-45^0=31.95^0+360^0k \qquad (2.)\quad 2x-45^0=-31.95^0+360^0k$$

$$2x=76.95^0+360^0k \qquad 2x=13.05^0+360^0k$$

$$\underline{x_1=38.475^0+180^0k} \qquad \underline{x_2=6.525^0+180^0k}$$

7. משוואות הומוגניות ממעלה ראשונה ושנייה

משוואות טריגונומטריות הינן הומוגניות לגבי פונקציות סינוס וקוסינוס אם הן מופיעות באותה החזקה ובאותו המחזור.

למשל: 3-, 5, 1, $\sin x$ ו- $\cos x$, $\sin^2 x$ ו- $\cos^2 x$.

באם הביטויים הללו יופיעו במשוואה, רק הם, או חלק מהם, אזי המשוואה תהיה הומוגנית מדרגה שניה.

דוגמאות: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha = 1$, $5=5\sin^2\alpha+5\cos^2\alpha$.

אם המשוואה היא הומוגנית, מחלקים לצורך הפיתרון את כל המשוואה ב- $\cos x$ בחזקה הגבוהה ביותר.

חובה לבדוק אם הפיתרון של $\cos x = 0$ מהווה פתרון של המשוואה המקורית וזאת ע"י הצבה $x = 90^0$ במשוואה המקורית.

רק אם $x = 90^0$ לא מהווה פתרון של המשוואה המקורית מותר לחלק ב- $\cos x$ בחזקה הגבוהה ביותר כפי שצויין מעלה. אם $x = 90^0$ מקיים את המשוואה המקורית יש לפתור בדרך אחרת.

דוגמאות:

א.

$\boxed{\sin 2x + 3\cos 2x = 0}$

$\sin 2x = -3\cos x \,/ : \cos 2x$

$\tan 2x = -3$

$2x = -71.56^0 + 180^0 k$

$\underline{x = -35.78^0 + 90^0 k}$

בדיקה: האם מותר לחלק?: ←

$\cos 2x = 0$

$2x = 90$

$x = 45$

$\sin 90 + 3\cos 90 \doteq^? 0$

$1 + 0 \neq 0$

מותר לחלק

ב.

$\boxed{\sin^2 x + 2\cdot\sin x\cdot\cos x = 3\cos^2 x} \,/ : \cos^2 x$

נבדוק לגבי $\cos x = 0$ ז"א $x = 90^0$

$\sin^2 90 + 2\cdot\sin 90\cdot\cos 90 \doteq^? 3\cos^2 90$

$1 + 0 \neq 0 \;\rightarrow$ מותר לחלק

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{2\cdot\sin x\cdot\cos x}{\cos^2 x} = \frac{3\cos^2 x}{\cos^2 x}$$

$\tan^2 x + 2\tan x = 3$

$\tan x = t \rightarrow t^2 + 2t - 3 = 0$

$$t_{1,2} = \frac{-2\pm 4}{2} = \begin{matrix} t_1 = -3 \\ t_2 = 1 \end{matrix}$$

(1.) $\tan x = -3$

$\underline{x_1 = -71.56^0 + 180^0 k}$

(2.) $\tan x = 1$

$\underline{x_2 = 45^0 + 180^0 k}$

ג.

$\boxed{1 - 3\cos^2 x = 2\cdot\sin x\cdot\cos x} \,/ : \cos^2 x$

נבדוק: האם מותר לחלק

$\cos x = 0 \rightarrow x = 90^0$

$1 - 3\cos^2 90 \doteq^? 2\cdot\sin 90\cdot\cos 90$

$1 + 0 \neq 0 \;\rightarrow$ מותר לחלק

$$\frac{1}{\cos^2 x} - 3 = 2\tan x$$

$1 + \tan^2 x - 3 = 2\tan x$

$\tan x = t$

$1 + t^2 - 3 = 2t$

$t^2 - 2t - 2 = 0$

$$t_{1,2} = \frac{2\pm\sqrt{12}}{2} = \begin{matrix} t_1 = 2.232 \\ t_2 = -0.732 \end{matrix}$$

(1.) $\tan x = -0.732$

$\underline{x_1 = -36.2^0 + 180^0 k}$

(2.) $\tan x = 2.732$

$\underline{x_2 = 69.89^0 + 180^0 k}$

הזהויות בטריגונומטריה

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{\cot\alpha}$$
$$\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1}{\tan\alpha}$$
$$\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$$

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$
$$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$
$$1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$\sec\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}$$
$$cosec=\frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\sin(90-\alpha)=\cos\alpha$$
$$\cos(90-\alpha)=\sin\alpha$$
$$\tan(90-\alpha)=\cot\alpha$$
$$\cot(90-\alpha)=\tan\alpha$$

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$$
$$\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$$

$$\sin\left(180^0-\alpha\right)=\sin\alpha$$
$$\cos\left(180^0-\alpha\right)=\cos\alpha$$
$$\tan\left(180^0-\alpha\right)=\tan\alpha$$
$$\cot\left(180^0-\alpha\right)=\cot\alpha$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\sin\beta\cdot\cos\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\sin\beta\cdot\cos\alpha$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$
$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$
$$\cot(\alpha+\beta)=\frac{\cot\alpha\cdot\cot\beta-1}{\cot\alpha+\cot\beta}$$
$$\cot(\alpha-\beta)=\frac{\cot\alpha\cdot\cot\beta+1}{\cot\alpha-\cot\beta}$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha \quad\Rightarrow\quad \sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha-\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha-1=2\sin^2\alpha-1$$
$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2} = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1=2\sin^2\frac{\alpha}{2}-1$$

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2}=1-\cos\alpha$$
$$2\sin^2\alpha=1-\cos 2\alpha$$
$$2\cos^2\frac{\alpha}{2}=1+\cos\alpha$$
$$2\cos^2\alpha=1+\cos 2\alpha$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$
$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$
$$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right]$$
$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$$
$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right]$$

	30^o	45^o	60^o
Sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
Cot	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$