דף נוסחאות במתמטיקה לתיכון ולאוניברסיטה

כללי

זהויות טריגונומטריות:

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$
$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$
$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$
$\sin(90-\alpha) = \cos\alpha$
$\cos(90-\alpha) = \sin\alpha$
$\tan(90-\alpha) = \cot\alpha$
$\cot(90-\alpha) = \tan\alpha$
$\sin(180-\alpha) = \sin\alpha$
$\cos(180-\alpha) = -\cos\alpha$
$\tan(180-\alpha) = -\tan\alpha$
$\tan\alpha = \sin\alpha / \cos\alpha$
$\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
$1+\tan^2\alpha = 1/\cos^2\alpha$
$1+\cot^2\alpha = 1/\sin^2\alpha$
$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$
$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
$\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$
$\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha$

$\tan(2\alpha) = 2\tan\alpha/(1-\tan^2\alpha)$
$\sin(3\alpha) = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$
$\cos(3\alpha) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$
$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin(a/2+\beta/2)\cos(a/2-\beta/2)$
$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin(a/2-\beta/2)\cos(a/2+\beta/2)$
$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos(a/2+\beta/2)\cos(a/2-\beta/2)$
$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin(a/2+\beta/2)\sin(a/2-\beta/2)$
$\sin\alpha\cos\beta = 1/2\left(\sin(a+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right)$
$\sin\alpha\sin\beta = 1/2\left(\cos(a-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$
$\cos\alpha\cos\beta = 1/2\left(\cos(a+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right)$
$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$
$\tan(\alpha+\beta) = (\tan\alpha + \tan\beta)/(1-\tan\alpha\tan\beta)$
$\tan(\alpha-\beta) = (\tan\alpha - \tan\beta)/(1+\tan\alpha\tan\beta)$
$\tan(\alpha+\beta) - \tan\alpha - \tan\beta = \tan(\alpha+\beta)\tan\alpha\tan\beta$
$\arcsin\alpha + \arccos\alpha = \pi/2$

נוסחאות שונות:

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$
$(a+b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$

הבינום של ניוטון:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$
$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^n + b^n$$
$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + b^{n-1}$$

נגזרות מיידיות:

$\sin' x = \cos x$
$\cos' x = -\sin x$
$\sinh' x = \cosh x$
$\cosh' x = \sinh x$

$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$arc\cot'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$
$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\cot'(x) = \frac{-1}{\sin^2 x}$

$(e^x)' = e^x$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$(a^x)' = a^x \ln a$
$(\log_a^x)' = \frac{1}{x\ln a}$

נגזרת מסדר גבוה:

$$(f(x)\cdot g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F^{(k)}\cdot g^{(n-k)} \quad , \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{n!(n-k)!}$$

אינטגרלים מיידים:

$\int \frac{1}{x}dx = \ln x + c$
$\int \ln x dx = x\ln x - x + c$
$\int \sin x = -\cos x + c$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} = \tan x + c$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} = -\cot x + c$
$\int \tan x dx = -\ln(\cos x) + c$
$\int \cot x dx = \ln(\sin x) + c$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + c$

$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c$
$\int \frac{1}{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right) + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}dx = \ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right) + c$
$\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln(x-a) + C$
$\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = A\cdot\frac{1}{1-n}(x-a)^{1-n} + C$
$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} = \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\cdot arctan\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right)$

הגדרות

סופרמום: החסם העליון הקטן ביותר - $Sup\{a_n\}$.

אינפימום: החסם התחתון הגדול ביותר - $Inf\{a_n\}$.

גבול חלקי (גבול של תת סדרה) גדול ביותר: $\overline{\lim}\, a_n = \limsup a_n$.

גבול חלקי (גבול של תת סדרה) קטן ביותר: $\underline{\lim}\, a_n = \liminf a_n$.

סדרות

סדרה חשבונית:

$a_n = a_0 + n\cdot d$

$S_n = (a_0 + a_n)\cdot\frac{n+1}{2}$

סדרה הנדסית:

$a_n = a_0 \cdot q^n$

$S_n = a_0 \cdot (\frac{q^n - 1}{q-1})$

הסדרה תמיד מתכנסת כאשר q<1.

סדרה מונוטונית:

1. **עולה** - קיים n_0 כך שלכל $n_0 \le n$ מתקיים: $a_{n+1} - a_n \ge 0$.
2. **יורדת** - קיים n_0 כך שלכל $n_0 \le n$ מתקיים: $a_{n+1} - a_n \le 0$.
3. **עולה / יורדת ממש** - קיום התנאים הנ"ל ללא ה"שווה" בהתאמה.

גבול של סדרה:

L הוא הגבול של סדרה אינסופית $\{a_n\}$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים n_0 טבעי כך שעבור $n \ge n_0$ (כלומר, החל מ- n מספיק גדול) מתקיים $|a_n - L| < \varepsilon$.

משפטי גבולות:

1. אם $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ אז $\lim_{n\to\infty}|a_n| = |L|$.
2. אם $a_n > 0$ לכל n, ואם $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ אז $\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n} = \sqrt{L}$.
3. אם $\lim_{n\to\infty} f(x) = L$ ואם $a_n = f(n)$ אז קיים $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

התכנסות של סדרה ומונוטוניות:

1. אם לאיבר הכללי a_n יש גבול הסדרה מתכנסת.
2. סדרה אינסופית $\{a_n\}$ לא מתכנסת לגבול L אם קיים לפחות $\varepsilon > 0$ אחד, כך שלכל n_0 טבעי קיים $n \ge n_0$ כך שמתקיים $|a_n - L| > \varepsilon$.
3. סדרה מונוטונית עולה וחסומה מלמעלה – תתכנס (לסופרימום שלה).
4. סדרה מונוטונית יורדת וחסומה מלמטה – תתכנס (לאינפימום שלה).
5. סדרה מונוטונית עולה ולא חסומה מלמעלה – שואפת ל- $+\infty$.
6. סדרה מונוטונית יורדת ולא חסומה מלמטה – שואפת ל- $-\infty$.

משפטי התכנסות של סדרה:

1. סדרה לא יכולה להתכנס ל- 2 גבולות שונים.
2. כל סדרה מתכנסת היא חסומה (אך לא להפך).
3. $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ סדרות אינסופיות ו- $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim_{n\to\infty} a_n = B$:

א. $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n = A \pm B$

ב. $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = A \cdot B$

ג. $\lim_{n\to\infty}(a_n / b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n / \lim_{n\to\infty} b_n = A / B$

ד. $\lim_{n\to\infty} C\cdot a_n = C\cdot\lim_{n\to\infty} a_n = C\cdot A$

הערה: קיום הגבולות של כל סדרה בנפרד הוא תנאי מספיק אך לא הכרחי לקיום הגבולות שבסעיפים א'- ד'.

4. אם קיים $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ו- $\{b_n\}$ חסומה אז: $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$.

משפט הסנדוויץ':

אם $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n$ וגם ל- n מספיק גדול מתקיים $b_n \le a_n \le c_n$ אז יש $\lim_{n\to\infty} a_n$ ומתקיים - $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n$.

משפט קנטור:

נתונה סדרה של קטעים $[a_n, b_n]$ (כלומר, $a_n < b_n$) המקיימת $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ (a_n מונוטונית עולה, b_n מונוטונית יורדת) ו- $\lim(b_n - a_n) = 0$, אז יש נקודה C הנמצאת בכל קטע כזה והיא יחידה.

תת סדרה: $\{b_k\}_{k=1}^{\infty} = \{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$

1. אם הסדרה המקורית מתכנסת אז כל תת סדרה שלה מתכנסת לאותו הגבול (ההפך גם נכון).
2. אם לסדרה קיימות לפחות 2 תתי סדרות המתכנסות לגבולות שונים, אז הסדרה המקורית מתבדרת.
3. **משפט בולזנו-ויישטרס**: אם סדרה חסומה, אז יש לה תת סדרה מתכנסת.

קריטריון קושי להתכנסות סדרה:

סדרה אינסופית $\{a_n\}$ מתכנסת אמ"מ לכל $\varepsilon > 0$ קיים n_0 טבעי כך שעבור $n \ge n_0$ ו- p טבעי (כלומר, החל מ- n מספיק גדול ו- p כלשהו) מתקיים $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$.

הערה: p יכול להיות אינסופי.

קריטריון קושי להתבדרות סדרה:

סדרה אינסופית $\{a_n\}$ מתבדרת אמ"מ לכל $\varepsilon > 0$ קיים n_0 טבעי כך שעבור $n \ge n_0$ ולכל p טבעי מתקיים $|a_{n+p} - a_n| \ge \varepsilon$.

הערה: לא יתכן שאותה סדרה תקיים בו זמנית את קריטריון קושי להתכנסות ולהתבדרות.

טור טיילור

תנאי הכרחי לקיום טור טיילור: $R_{(n)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$$f_{(x)} = f_{(x_0)} + \frac{f'_{(x_0)} \cdot (x - x_0)}{1!} + \ldots + \frac{f^{(n)}{}_{(x_0)} \cdot (x - x_0)^n}{n!} + R_{(n)}$$

$$R_{(n)} = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot_{\max(x, x_0)} f^{(n+1)}{}_{(c)}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_{(n)}$$

$$R_{(n)} = \frac{e^c \cdot x^{n+1}}{(n+1)!}$$

הערה: טור טיילור סביב 0 נקרא טור מקלורן.

טורים אינסופיים

טור אינסופי: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (a_n נקרא ה"איבר הכללי" של הטור)

סכום חלקי של טור:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

טור אינסופי מתכנס ל- S אם: $\{S_n\} \xrightarrow{n\to\infty} S$ ($\{S_n\}$ - סדרה של סכומים חלקיים).

תנאי הכרחי אך לא מספיק להתכנסות טורים: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אז $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. כלומר, אם a_n באינסוף לא שואף ל- 0 אז הטור מתבדר.

דוגמא:

האיבר הכללי של הטור ההרמוני $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - שואף ל- 0, אך הטור עצמו מתבדר.

האיבר הכללי של הטור ההרמוני $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ שואף ל- 0. אם $\alpha > 1$ אז גם הטור עצמו מתכנס.

טור מתכנס בהחלט: אם $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתכנס. טור מתכנס על תנאי: מתכנס אך לא בהחלט.

משפט: אם טור מתכנס בהחלט אז הטור המקורי מתכנס.

קריטריון קושי להתכנסות טורים:

תנאי הכרחי ומספיק להתכנסות $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ הוא שלכל $\varepsilon > 0$ קיים n_0 טבעי כך שעבור $n \ge n_0$ ולכל p טבעי מתקיים $|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon$.

שארית / זנב של טור:

הגדרה: $r_m \triangleq \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$ (לכל m טבעי).

משפט: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ אז $r_m = S - S_m$.

משפט:

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנסים בנפרד אז: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (אך לא להפך).

משפט דירכלה להתכנסות טורים:

אם $\{a_n\}$ מונוטונית (עולה או יורדת), $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ (ז"א <u>הטור</u> של a_n חסום) וכל הסכומים החלקיים של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ חסומים (ז"א <u>הטור</u> של b_n מתכנס), אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ מתכנס.

משפט אבל להתכנסות טורים:

אם $\{a_n\}$ חסומה ומונוטונית, והטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס, אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ מתכנס.

טורים חיוביים

הגדרה: טור המכיל רק איברים חיוביים: $a_n > 0$. כלומר, $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית עולה ממש.

קריטריון השוואה ראשון:

אם עבור n מספיק גדול מתקיים $a_n \le b_n$ אז:

1. אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס - אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.
2. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר - אז $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתבדר.

קריטריון השוואה שני (לטורים חיוביים):

אם $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ אז:

1. עבור $0 < L < \infty$: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס/מתבדר אמ"מ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס/מתבדר.
2. עבור $L = 0$: אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.
3. עבור $L = \infty$: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אז $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס.

קריטריון השוואה של קושי (לא רק לטורים חיוביים):

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור אינסופי חיובי. נסמן $C = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

1. אם $C < 1$ אז הטור מתכנס בהחלט.
2. אם $C > 1$ אז הטור מתבדר.
3. אם $C = 1$ אז לא ניתן לדעת ע"פ קריטריון זה.

משפט דה-למבר (לא רק לטורים חיוביים):

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור אינסופי חיובי. נסמן $D = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right|$.

1. אם $D < 1$ אז הטור מתכנס בהחלט.
2. אם $D > 1$ אז הטור מתבדר.
3. אם $D = 1$ אז לא ניתן לדעת ע"פ קריטריון זה.

הערות:

- אם לא קיים גבול D (אך הוא לא אינסוף) אז ניתן למצוא את הערך המקסימלי של הביטוי ואם הוא קטן מאחד אז הטור מתכנס.
- $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \sqrt[n]{a_n}$

מבחן אינטגרל להתכנסות טורים:

פונקציה מוגדרת בקטע חצי אינסופי.

אם הפונקציה מונוטונית יורדת בקטע זה אז מתקיים:

$$a_n = f_{(n)} \ : \ \int_1^\infty f_{(x)}dx = const_1 \Leftrightarrow \sum a_n = const_2$$

ז"א גם הטור מתכנס. יש לשים לב שהפונקציה והטור מתכנסים **אך לא לאותו ערך!**

טורים עם סימנים מתחלפים

הגדרה: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ כאשר $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ טור חיובי.

הערה: אם טור מחליף סימן אז גם הזנב שלו הוא טור מחליף סימן.

משפט לייבניץ (אך ורק לטורים עם סימנים מתחלפים):

נסמן: $S = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$.

אם $\{a_n\}$ סדרה חיובית, מונוטונית יורדת ושואפת ל- 0 אז:

1. הטור S מתכנס.
2. $0 < S < a_1$.
3. $|r_m| < a_{m+1}$ ו- $(-1)^m \cdot r_m > 0$.

טור טלסקופי

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1} - a_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n - a_1)$$

טורי חזקות

טור חזקות סביב הנקודה x_0:

$$\sum_{n=0}^{n}a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots$$

סכום חלקי של טור חזקות:

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n$$

התכנסות של טור חזקות:

אם הסדרה $\{S_n(x)\}$ מתכנסת אז טור החזקות מתכנס.

הערה: בנקודה x=0 כל טור חזקות מתכנס, והאיבר a_0 יהיה סכומו.

משפט אבל / דירכלה לטורי חזקות:

1. אם טור חזקות $\sum_{n=0}^{n}a_n(x-x_0)^n$ מתכנס בנקודה $x - x_0 = \alpha$ אז הוא יתכנס בהחלט לכל x שמקיים: $|x-x_0| < |\alpha|$.
2. אם טור חזקות $\sum_{n=0}^{n}a_n(x-x_0)^n$ מתבדר בנקודה $x - x_0 = \alpha$ אז הוא יתבדר לכל x שמקיים: $|x-x_0| > |\alpha|$.

רדיוס התכנסות:

משפט קושי – הדמר עבור טורי חזקות:

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$$

משפט דה-למבר עבור טורי חזקות:

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}} = \lim\frac{a_n}{a_{n+1}}$$

1. עבור x שמקיים $|x-x_0| < R$ הטור מתכנס בהחלט.
2. עבור x שמקיים $|x-x_0| > R$ הטור מתבדר.
3. אם $R=0$ אז הטור מתכנס בהחלט עבור x=0 ומתבדר בכל נקודה אחרת.
4. אם $R=\infty$ אז הטור מתכנס בהחלט לכל x ממשי.
5. אם נבנה פונק' סכומים $S_{(x)} = \sum_{n=0}^{\infty}a_n \cdot x^n$ אז פונק' זו רציפה לכל x שברדיוס

$$\frac{1}{1-x^2} = ?$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots \quad |x| < 1 = R \ \Rightarrow \ |x^2| < 1 = R$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots \quad |x^2| < 1 = R$$

מתכנס עבור: $|x| < 1$ — $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \ldots$

מתכנס עבור: $|x| < 1$ — $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty}x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$

מתכנס עבור: $|x| < 1$ — $\frac{x}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty}x^n = x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$

מתכנס עבור: $|x| < \infty$ — $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2\cdot n+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$

מתכנס עבור: $|x| < \infty$ — $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2\cdot n)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$

מתכנס עבור: $|x| < 1$ — $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$

מתכנס עבור: $|x| < 1$ — $e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

נוסחה להכפלת טורים:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n \cdot x^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n \cdot x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_nb_0)\cdot x^n$$

הצגת פונקציה כטור מקלורן (סביב אפס):

אם פונקציה $f_{(x)}$ גזירה אינסוף פעמים וגם $|f^{(n)}{}_{(x)}| < M$ אז ניתן להציג את הפונקציה כטור מקלורן. $f_{(x)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}{}_{(0)}}{n!}\cdot X^n$

פונקציות

הגדרת גבול פונקציה לפי היינה:

L הוא גבול של פונקציה F בנקודה x_0 אם נבנהאינסוף סדרות (של נקודות) שמתכנסות ל- x_0,

נפעיל את הפונק' על כל סדרה כזו ונקבל סדרה שמתכנסת לאותו גבול L (מספיק למצוא סדרה אחת שלא מקיימת את הנ"ל עמ' לקבוע שלפונק' אין גבול).

דוגמא:

$$f_{(x)} = \sin\frac{1}{x} \quad x \neq 0$$

התכנסות.

6. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}$ נכון לכל טור חזקות עם רדיוס התכנסות חיובי.
לשני הטורים יש אותו רדיוס התכנסות.
7. עבור כל x שבתוך רדיוס ההתכנסות מתקיים: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \int_0^x t^n dt = \int_0^x S_{(t)} dt$
8. עבור כל x בתחום ההתכנסות מתקיים: $\sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cdot x^n\right)' = S'_{(x)}$
9. אם נתון טור מסוג: $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n^\alpha} \cdot x^{n^\alpha}$ אז $R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n^\alpha]{a_{n^\alpha}}}$

הערות:
- עבור כל x בתחום ההתכנסות ניתן לגזור את פונקציית הסכומים אינסוף פעמים.
- בנקודות הקצה $x = \pm R$ **חובה לבדוק את הטור לפי משפטי התכנסות של טורים רגילים** כי רדיוס ההתכנסות לא נותן מידע על נקודות אלו.

פיתוח לטור חזקות:
בהנתן פונקציה לפיתוח לטור חזקות, לעיתים ניתן לפתח טור חזקות לפונקציה פשוטה יותר (הדומה למקורית) ולבסוף להציב את הפונקציה המקורית. **אך על המשתנה החדש לקיים את תנאי ההתכנסות של המשתנה הישן.**
דוגמא:

$\{x_n^1\} \Rightarrow x_n^1 = \frac{1}{n\cdot\pi} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \qquad \{x_n^2\} \Rightarrow x_n^2 = \frac{1}{n\cdot\pi + \frac{\pi}{2}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$\sin\frac{1}{x_{n(1)}} = \sin n\cdot\pi \xrightarrow{n\to\infty} 0 \qquad \sin\frac{1}{x_{n(2)}} = \sin\frac{\pi}{2} + n\cdot\pi \xrightarrow{n\to\infty} 1$

אנו רואים שלמרות ש- 2 האיברים הכללים של הסדרות מתכנסים לאותו הגבול (לאפס), ישנן 2 גבולות לפונק' וזו סתירה – לכן אין לפונקציה גבול.

הגדרת גבול פונקציה לפי קושי:
אם לכל ε מספיק קטן יש δ מספיק קטנה כך ש:

$|f_{(x)} - L| < \varepsilon \quad \to |x - x_0| < \delta$

ז"א מציאת אפסילון מספיק קטן יגרור מציאת "למדה" מספיק קטנה.
דוגמא:

$\lim_{x\to3} x^2 \overset{?}{=} 9$

$|x^2 - 9| = |x-3| \cdot |x+3| < \varepsilon$

$|x+3| < c \Rightarrow |x-3| < \frac{\varepsilon}{c}$

$|x-3| < 1 \Rightarrow 2 < x < 4 \Rightarrow c_{\max} = 7$

$\left.\begin{array}{l} |x-3| < \frac{\varepsilon}{c} = \frac{\varepsilon}{7} \\ |x-3| < 1 \end{array}\right\} \delta = \min(1, \frac{\varepsilon}{7}) \Rightarrow \varepsilon = \begin{cases} \varepsilon > 7\delta & \delta = 1 \\ 7\delta & \delta \neq 1 \end{cases}$

$\lim_{x\to\infty} C = C \ ,\ \lim_{x\to\infty} \alpha \cdot f_{(x)} = \alpha \cdot L_f \ ,\ \lim_{x\to\infty} \left(f_{(x)} + g_{(x)}\right) = L_f + L_g$

$\lim_{x\to\infty} \left(f_{(x)} \cdot g_{(x)}\right) = L_f \cdot L_g \ ,\ \lim_{x\to\infty} \left(\frac{f_{(x)}}{g_{(x)}}\right) = \frac{L_f}{L_g} \ , L_g \neq 0$

גבול חד צדדי:
גבול חד צדדי הוא גבול מצד אחד של הפונק' ללא תלות במה שקורה לפונק' בנק' או מהצד השני שלה. נסמן אותו בצורה:

$\lim_{x\to x_0+} f(x) \ , \lim_{x\to x_0-} f(x)$

משפט: לפונק' יש גבול בנקודה, אם קיימים 2 גבולות חד צדדיים בנק', והם שווים.

פונקציות ב- 2 נעלמים
גבול בפונקציה של 2 משתנים:
L הוא גבול של פונקציה $f(x,y)$ בנקודה (x_0, y_0) אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל נקודה שמקיימת $0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$ מתקיים:
$|f(x,y) - L| < \varepsilon$.

הערה: בנקודה (x_0, y_0) הפונקציה לא חייבת להיות מוגדרת, אלא רק בסביבתה.

סימון גבול רגיל / כללי / כפול של פונקצית 2 משתנים: $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$.

שיטות למציאת / בדיקת גבול של פונקציה עם 2 משתנים:
1. הצבת: $y = kx\ ,\ y = kx^2\ ,\ x = ky^2$
- אם התשובה תלויה ב- k אז אין גבול לפונקציה.
- **אם התשובה לא תלויה ב- k עדיין איננו יודעים אם יש גבול או לא!** (יש להמשיך לבדוק ע"פ הגדרה או ע"פ משפט הסנדוויץ').
2. **משפט הסנדוויץ':**
מוצאים פונקציה h(x,y) הגדולה מ- f(x,y), ומשאיפים אותה לנק' הרצויה.
מוצאים פונקציה g(x,y) הקטנה מ- f(x,y), ומשאיפים אותה לנק' הרצויה.
$\underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{g(x,y)} \le |f(x,y)| \le \underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{h(x,y)}$
הערה: ניתן להשתמש בפונקציה בערך מוחלט כי הגדרת גבול הפונקציה היא בערך מוחלט.
3. **גבול חוזר:**
גבול חוזר לפי x ואח"כ לפי y: $\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)$
גבול חוזר לפי y ואח"כ לפי x: $\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)$
- אם הגבולות החוזרים שווים או שונים – אין זה אומר דבר על הגבול הכפול.
- אם לפונקציה קיים גבול כפול, וקיים $\lim_{x\to x_0} f(x,y)$ אז קיים גבול חוזר $\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)$ והוא שווה לגבול הכפול של הפונקציה $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$.
- **אם קיימים לפונקציה גבולות חוזרים והם שונים זה מזה, אז אין גבול כפול לפונקציה בנקודה זו.**
4. הצבת 2 נקודות שונות:

אנו אומרים שהפונק' רציפה בנק' x_0 אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל x המקיים את $|x - x_0| < \delta$ יתקיים גם $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

הערות:
1. פונקציה רציפה בנקודה מסוימת אם יש לה גבול בנקודה.
2. אם f, g רציפות אז $f_{(x)} + g_{(x)},\ f_{(x)} \cdot g_{(x)},\ \frac{f_{(x)}}{g_{(x)}},\ \alpha \cdot f_{(x)}$ רציפות גם כן.
3. כל פולינום או מנת פולינומים רציפים (בתחום ההגדרה).
4. סינוס וקוסינוס ואקספוננט רציפים לכל x.
5. פונק' טריגו רציפות בתחום הגדרתן.

בדיקת רציפות פונקציה:
- נניח שיש לנו למדה מספיק קטנה ונבדוק אם זה גורר אפסילון מספיק קטן: $|x - x_0| < \delta \quad \to \quad |f_{(x)} - L| < \varepsilon$
- אם פונקציה מבצעת העתקה חח"ע ו"על" ובנוסף לכך היא רציפה בנק' x_0 - אז הפונקציה שמבצעת העתקה הופכית גם רציפה בנק' $f_{(x_0)} = y_0 \Rightarrow g_{(y_0)}$

אי רציפות בפונקציות:
1. **אי רציפות סליקה:**
א. ערך הפונק' בנקודה שונה מערך הגבול של הפונק' בנקודה.
ב. הפונק' לא מוגדרת בנקודה זו.
2. **אי רציפות מסוג ראשון:** לפונק' יש 2 גבולות חד צדדיים אך הם שונים זה מזה.
3. **אי רציפות מסוג שני:** <u>לפחות</u> אחד מהגבולות החד צדדיים לא קיים.

הרכבה של פונקציות:
אם 2 פונקציות רציפות בנק' מתאימות אז ההרכבה שלהן גם כן רציפה:
דוגמא: $\cos x = \sin(\pi/2 - x)$
פונקציית סינוס רציפה והתוכן של ההוא פולינום (רציף) לכן גם קוסינוס רקיף.

תכונות של פונקציות רציפות:
1. משפט ערך הביניים של קושי לגבי רציפות פונקציות:
אם פונקציה רציפה בקטע סגור $[a,b]$ ומתקיים: $f_{(a)} \le f_{(b)}$ וגם $f_{(a)} \le \gamma \le f_{(b)}$ (עבור גמא ממשי כלשהו) אז בתוך הקטע קיימת נקודה אחת לפחות $x = c$ שבה $f_{(c)} = \gamma$.

מסקנה ממשפט ערך הביניים של קושי: אם פונקציה רציפה בקטע סגור $[a,b]$ והיא מקבלת ערכים חיוביים ושליליים בקטע זה, אז יש לה חיתוך עם ציר ה- x:
$f_{(a)} \cdot f_{(b)} < 0 \Rightarrow f_{(c)} = 0 \ ,\ c \in [a,b]$
הערה: כל פולינום מחזקה אי זוגית הוא בעל שורש ממשי אחד לפחות.
2. משפט ויירשטרס 1 לגבי רציפות פונקציות:
אם פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ אז היא גם חסומה בקטע זה.
3. משפט ויירשטרס 2 לגבי רציפות פונקציות:
אם פונקציה רציפה בקטע סגור $[a,b]$ אז היא מקבלת נק' קיצון בקטע זה.

רציפות במידה שווה
אם $|x_1 - x_2| < \delta$ אז זה גורר $|f_{(x_1)} - f_{(x_2)}| < \varepsilon$ בתוך התחום הנבדק.
דוגמא:

$f(x) = \frac{1}{x}\ ,\ x \in (\frac{1}{2}, 1)$

$\left|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right| = \left|\frac{x_2 - x_1}{x_2 \cdot x_1}\right| < \left|\frac{x_2 - x_1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}\right| = 4 \cdot |x_2 - x_1| < \varepsilon \qquad |x_2 - x_1| < \delta \Rightarrow \varepsilon = 4 \cdot \delta$

פונק' קמורה:
אם קיימת סביבה של x_0 שבה $f_{(x)} \ge f_{(x_0)} + f'_{(x_0)} \cdot (x-x_0)$

פונק' קעורה:
אם קיימת סביבה של x_0 שבה $f_{(x)} \le f_{(x_0)} + f'_{(x_0)} \cdot (x-x_0)$

משפט:
אם $f''_{(x)} > 0$ בקטע פתוח אז הפונקציה קמורה בקטע זה (מינימום).
אם $f''_{(x)} < 0$ בקטע פתוח אז הפונקציה קמורה בקטע זה (מקסימום).
אם $f''_{(x)} = 0$ בקטע פתוח אז לא ידוע מה קורה (אוכף).

משפט פרמה:

אם לפונקציה יש מינימום/מקסימום מקומי בנק' x_0 והיא גם גזירה בנק' זו אז הנגזרת שווה אפס בנק' זו (בתנאי שזה לא קטע סגור שהנק' היא אחת הקצוות שלו).

משפט רול:

אם פונק' רציפה וגזירה בקטע פתוח (a,b) ו- $f_{(a)} = f_{(b)}$ אז קיימת נק' בתחום שבה הנגזרת מתאפסת ($f'_{(c)} = 0$).

הערה: בין 2 נקודות שבהן לפונקציה אותו ערך - תמיד תהיה נק' שבה הנגזרת מתאפסת.

הוכחת שורש אחד ויחיד לפונקציה:

מוצאים נקודה שבה הפונקציה חיובית, ונקודה שבה הפונקציה שלילית, ואז מוכיחים שהפונקציה מונוטונית יורדת / עולה ממש.

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$$

$$\left.\begin{array}{l} (\frac{1}{n},\frac{1}{n}) \xrightarrow{n\to\infty} (0,0) \Rightarrow f(\frac{1}{n},\frac{1}{n}) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2} \\ (\frac{1}{n},\frac{2}{n}) \xrightarrow{n\to\infty} (0,0) \Rightarrow f(\frac{1}{n},\frac{2}{n}) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{5} \end{array}\right\} no\ limit$$

5. העברת הפונקציה לפונקציה של משתנה אחד:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} \cdot \sin(1/(x^2+y^2)) \Rightarrow u = x^2+y^2 \Rightarrow \lim_{u\to 0} \sqrt{u} \cdot \sin\frac{1}{u} = 0$$

הערה: כל משפטי הגבול שהיו נכונים לגבי פונקציה של משתנה אחד תקפים עד לגבי פונקציות של 2 משתנים.

רציפות בפונקציות

הגדרה: תהי פונק' מוגדרת בסביבת נק' x_0 כולל הנק' עצמה.

משפט לגרנג' (משפט הערך הממוצע):

אם פונק' רציפה בקטע סגור $[a,b]$ וגזירה באותו קטע (אבל פתוח), אז בתוך הקטע קיימת נקודה אחת לפחות שמקיימת: $c \in [a,b]$, $\frac{f_{(b)} - f_{(a)}}{b-a} = f'_{(c)}$.

נגזרות חלקיות

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f_{(x_0+\Delta x, y_0)} - f_{(x_0,y_0)}}{\Delta x}$$

נגזרת חלקית היא קצב השתנות הפונקציה בכוון מסויים.
אם קיימות נגזרות חלקיות ל- x ו- y עדיין לא יודעים אם הפונקציה רציפה או לא.

משפט שוורץ:

אם הפונקציה וכל הנגזרות שלה עד סדר שני רציפות בנק', אז $f_{xy(x_0,y_0)} = f_{yx(x_0,y_0)}$.

נגזרת כיוונית

אם $\hat{u} = (a,b)$ (מנורמל) אז נגזרת מכוונת של F בכיוון U היא:

$$D_u f_{(x_0,y_0)} = \lim_{h\to 0} \frac{f_{(x_0+h\cdot a,\, y_0+h\cdot b)} - f_{(x_0,y_0)}}{h} = (\nabla \cdot f)\cdot \hat{u}$$

כמו כן

$$D_u f_{(x_0,y_0)} = \frac{df_{(x_0,y_0)}}{dx} \cdot a + \frac{df_{(x_0,y_0)}}{dy} \cdot b$$

אם ידוע ש $\hat{u} = (a,b)$ יוצר זוית α עם ציר x אז:

$$D_u f_{(x_0,y_0)} = \frac{df_{(x_0,y_0)}}{dx} \cdot \cos\alpha + \frac{df_{(x_0,y_0)}}{dy} \cdot \sin\alpha$$

אם פונקציה בעלת 2 משתנים או יותר אז קצב ההשתנות הכי גדול שלה הוא גודל הגרדיאנט של הפונקציה : $|\nabla \cdot f|$

מינימום מקומי:

אם לפונק' יש נגזרות רציפות עד וכולל סדר 2, אז:

$$\Delta = f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2$$

אם נרצה להפריח את הרציפות במ"ש אז נניח עבור למדה ונוכיח שאפסילון תמיד קטן יותר ולא גדול יותר (אפסילון לא שואף לאפס).

משפט קנטור לרציפות:

אם פונקציה רציפה בקטע סגור אז היא גם רציפה במ"ש באותו קטע (פתוח או סגור).

אם פונקציה רציפה במ"ש בקטע מסוים אז היא גם רציפה באותו קטע (לאו דווקא קטע סגור).

גזירת פונקציות

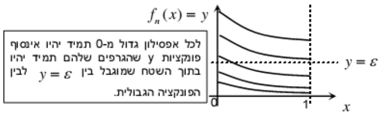
הפונקציה גזירה בנק' x_0 אם קיים הגבול: $f'_{(x_0)} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f_{(x_0+\Delta x)} - f_{(x_0)}}{\Delta x}$

משוואת משיק:

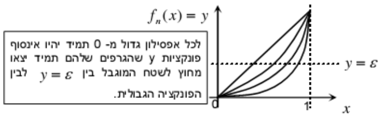
$$y = f_{(x_0)} + f'_{(x_0)} \cdot (x-x_0) \quad , \; df = f'_{(x_0)} \cdot (x-x_0)$$

אם הפונק' גזירה בנק' אז היא גם רציפה בנק' זו (לא להפך).

הסבר גאומטרי:
התכנסות במ"ש (וגם מתכנס) - $f_n(x) = 1/(x^2+n)$:



לא מתכנס במ"ש (וגם לא מתכנס) - $f_n(x) = x^n \;,\; 0 \le x \le 1$:



קריטריון קושי להתכנסות במ"ש של סדרת פונקציות:

סדרת פונקציות $\{f_n(x)\}$ מתכנסת במ"ש אמ"מ לכל $\varepsilon > 0$ קיים N טבעי כך שעבור $n > N$ ולכל p טבעי, ולכל x בתחום, מתקיים $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$.

אינטגרציה וגזירה של סדרות פונקציות:

אם $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת פונקציות רציפות בקטע [a,b], שמתכנסת במ"ש לפונקציה גבולית $f(x)$, אז:

1. הפונקציה הגבולית אינטגרבילית בקטע.
2. סדרת האינטגרלים: $\left\{\int_a^x f_n(t)dt\right\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במ"ש לאינטגרל: $\int_a^x f(t)dt$.

$$\Delta > 0 \Rightarrow \begin{cases} f_{xx} > 0 \Rightarrow \min \\ f_{xx} < 0 \Rightarrow \max \end{cases}$$
$$\Delta > 0 \Rightarrow saddle$$
$$\Delta = 0 \Rightarrow ?$$

מציאת נקודות חשודות למינ' / מקס' בפונקציה של 2 משתנים:

מוצאים נקודות המקיימות $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ וגם $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ והן הנקודות החשודות.

סדרות של פונקציות

סדרה אינסופית של פונקציות: $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$. פונקציה גבולית: $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$

הערה: פונקציה גבולית יכולה להיות לא רציפה למרות שכל פונקציה $f_n(x)$ בנפרד רציפה.

התכנסות של סדרת פונקציות:

סדרת פונקציות מתכנסת לפונקציה הגבולית אם לכל $\varepsilon > 0$, ולכל x בתחום ההגדרה, קיים n_0, **שתלוי ב- x וגם באפסילון**, כך שלכל $n > n_0$ יתקיים $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

משפט: טור אינסופי של פונק' מתכנס אמ"מ סדרה אינסופית של סכומים חלקיים של הפונקציה מתכנסת.

$$S_{(x)} = \lim_{x\to\infty} S_{n(x)} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_{(x)} = S_{(x)}$$

התכנסות במ"ש של סדרת פונקציות:

סדרת פונקציות מתכנסת במ"ש לפונקציה הגבולית אם לכל $\varepsilon > 0$, ולכל x בתחום ההגדרה, קיים N, **שתלוי רק באפסילון**, כך שלכל $n > N$ יתקיים $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

דוגמא:

$$f_n(x) = \frac{1}{x^2 + n} \quad 0 \le x \le 1$$
$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

N תלוי רק באפסילון ולכן נגדיר: $N = [1/\varepsilon]$.

עבור $n > N$ מתקיים:

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x) - 0| = \frac{1}{x^2 + n} \le \frac{1}{n} < \varepsilon$$

קריטריון קושי להתכנסות במ"ש של טורי פונקציות:

טור פונקציות $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במ"ש אמ"מ לכל $\varepsilon > 0$ קיים N (תלוי רק באפסילון) טבעי כך שעבור $n > N$ ולכל p טבעי, ולכל x בתחום, מתקיים:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_n(x)\right| = \left|\sum_{n=1}^{n+p} f_n(x) - \sum_{n=1}^{n} f_n(x)\right| < \varepsilon.$$

הערה: אם טור פונקציות המתכנס במ"ש (בתחום מסוים) מוכפל בפונקציה כלשהי החסומה באותו התחום, אז ההתכנסות במ"ש תשאר.

משפט ווירשטראס להתכנסות טורי פונקציות:

עבור טור הפונקציות: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

אם הטור החיובי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס ומתקיים $|f_n(x)| \le a_n$ (לכל n טבעי) אז טור הפונקציות מתכנס במ"ש בתחום בו הוא מוגדר.

אינטגרציה וגזירה של טורי פונקציות:

משפט: אם $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ הוא טור פונקציות המתכנס במ"ש לפונקציה $S(x)$ בקטע [a,b]

אז:

1. הפונקציה הגבולית $S(x)$ אינטגרבילית בקטע.
2. טור האינטגרלים: $\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x f_n(t)dt$ מתכנסת במ"ש בקטע.
3. מתקיים (החלפת סדר אינטגרציה): $\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x f_n(t)dt = \int_a^x \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)dt$.

משפט: נתון הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

אם:

1. כל הפונקציות $f_n(x)$ בעלות נגזרות רציפות בקטע [a,b].
2. הטור מתכנס ל- $S(x)$.
3. טור הנגזרות $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ מתכנס במ"ש בתחום.

משפט דיני לסדרות פונקציות

אם $f_n(x)$ רציפה לכל x בתחום, ו- $f(x)$ לא רציפה אז סדרת הפונקציות **<u>לא</u>** מתכנסת במ"ש.

טורים של פונקציות

טור אינסופי של פונקציות: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

סכום חלקי של טור פונקציות: $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$.

סדרת הסכומים החלקיים: $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$.

סכום גבולי = ערך הטור: $S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$.

התכנסות טורי פונקציות:

אם הסדרה $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת אז הטור מתכנס.

כלומר, אם קיים $S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$ אז $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס.

התכנסות במ"ש של טורי פונקציות:

טור פונקציות מתכנס לסכום הגבולי $S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$ במ"ש אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים N, **(שתלוי רק באפסילון)**, כך שלכל $n > N$ יתקיים $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$.

במילים אחרות: אם לכל x בתחום מתקיים $Sup|r_n(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ אז טור הפונקציות מתכנס במ"ש.

משפט: אם $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ שואפת לסכום הגבולי במ"ש אז הטור מתכנס במ"ש.

זנב / שארית של טור פונקציות:

הגדרה - זנב / שארית של טור:

$$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_n(x) = S(x) - S_n(x)$$

זנב / שארית $(r_n(x))$ של טור שואף ל- 0 במ"ש אמ"מ הטור מתכנס במ"ש לסכום הגבולי.

- אם $f_n(x)$ מתבדרת בתחום אז טור הפונקציות לא מתכנס במ"ש.
- אם הפונקציה הגבולית $S(x)$ לא רציפה אז טור הפונקציות לא מתכנס במ"ש.

דיפרנציאל מסדר שני:

$$d^2 f = f_{xx} d^2 x + 2 f_{xy} dxdy + f_{yy} d^2 y$$

בדיקת דיפרנציאביליות:

1. בדיקה ש- 2 הנגזרות החלקיות קיימות ורציפות.
2. בדיקת ε שואף לאפס כאשר H ו K שואפים לאפס.

$$f_{x(x_0,y_0)} = \lim_{\substack{h\to 0 \\ (x_0,y_0)}} \frac{f_{(x_0+h,y_0)} - f_{(x_0,y_0)}}{h}$$

$$\varepsilon = \lim_{h,k\to 0} \frac{f_{(x_0+h,y_0+k)} - f_{(x_0,y_0)} - h\cdot f'_{x(x_0,y_0)} - k\cdot f'_{y(x_0,y_0)}}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

כלל השרשרת

$$\frac{d\left(f_{(x(t),y(t))}\right)}{dt} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d\left(g_{(x(u,v),y(u,v))}\right)}{du} = \frac{dg}{dx}\frac{dx}{du} + \frac{dg}{dy}\frac{dy}{du}$$

$$\frac{d\left(g_{(x(u,v),y(u,v))}\right)}{dv} = \frac{dg}{dx}\frac{dx}{dv} + \frac{dg}{dy}\frac{dy}{dv}$$

טיילור ב- 2 משתנים

$$f_{(x_0+h,y_0+k)} = f_{(x_0,y_0)} + \left(h\frac{df_{(x_0,y_0)}}{dx} + k\frac{df_{(x_0,y_0)}}{dy}\right) + \frac{1}{2!}\left(h\frac{df_{(x_0,y_0)}}{dx} + k\frac{df_{(x_0,y_0)}}{dy}\right)^2 +$$
$$+ \frac{1}{n!}\left(h\frac{df_{(x_0,y_0)}}{dx} + k\frac{df_{(x_0,y_0)}}{dy}\right)^n$$

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{df_{(x_0+\theta h,y_0+\theta k)}}{dx} + k\frac{df_{(x_0+\theta h,y_0+\theta k)}}{dy}\right)^{n+1} \quad , \ 0 < \theta < 1$$

אינטגרלים

1. פונקציה אינטגרבילית לפי דרבו אמ"מ היא אינטגרבילית לפי רימן.
2. **משפט**: אם פונקציה רציפה בקטע סגור אז היא אינטגרבילית בקטע זה.
3. **משפט**: אם פונקציה רציפה למקוטעין (מס' סופי של נק' אי רציפות) אז הפונקציה אינטגרבילית.

אז:
1. הטור המקורי מתכנס במ"ש.
2. $S(x)$ היא פונקציה גזירה.
3. מתקיים השוויון: $S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)'$ לכל x בקטע [a,b].

הערה:

מתכנס במ"ש ← מתכנס   רציפות במ"ש ← רציפות

אינטגרציה וגזירה איבר איבר

אם טור פונקציות מתכנס במ"ש אז ניתן לבצע עליו אינטגרציה או גזירה איבר איבר (אך לא להפך).

כופלי לגרנג'

מציאת מינימום ומקסימום של פונק' f עם אילוץ g.

$$f_{(x,y,\lambda)}=f_{(x,y)}-\lambda\cdot g_{(x,y)}$$

$$\left.\begin{aligned} f_x-\lambda\cdot g_x&=0\\ f_y-\lambda\cdot g_y&=0\\ g_{(x,y)}&=0\end{aligned}\right\}$$

נוסחה למרחק מישר:

מרחק הנקודה (x_0,y_0) מהישר $a\cdot x+b\cdot y+c=0$: $\frac{|a\cdot x_0+b\cdot y_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

דיפרנציאלים

דיפרנציאלמסדר ראשון:

$$df=f_{x(x_0,y_0)}dx+f_{y(x_0,y_0)}dy$$

$$df=f_{(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)}-f_{(x_0,y_0)}$$

1. זהו למעשה טור טיילור ב- 2 משתנים מסדר ראשון (עד נגזרת ראשונה).
2. דיפרנציאל הוא השתנות הפונקציה על מישור משיק לנק הגזירה.
3. עמ' שפונק' תהיה דיפ' הגרף שלה צריך להיות חלק (ללא חוד).
4. אם פונק' דיפ' בנק' אז היא גם רציפה בנק'.
5. אם פונק' לא רציפה היא גם לא דיפ' בנק'.
6. תנאי מספיק אך לא הכרחי: אם קיימות נגזרות חלקיות כפונק' של x ו- y בנקודה, וגם הפונק' והנגזרות החלקיות רציפות בנק' זו, אז הפונק' דיפ' בנק' זו.

אינטגרל לא אמיתי:

$$\int_a^{\infty} f_{(x)}dx=\lim_{x\to\infty}\int_a^{x} f_{(x)}dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{(x)}dx=\lim_{x\to-\infty}\int_x^{a} f_{(x)}dx+\lim_{x\to\infty}\int_a^{x} f_{(x)}dx$$

השוואה בין אינטגרלים לא אמיתיים:

אם $0\le f_{(x)}\le g_{(x)}$ אז:

$$\int_a^{\infty} g_{(x)}dx=Const_1\ \Rightarrow\int_a^{\infty} f_{(x)}dx=const_2$$

$$\int_a^{\infty} f_{(x)}dx\ne Const_1\ \Rightarrow\int_a^{\infty} g_{(x)}dx\ne const_2$$

אינטגרביליות בהחלט:

אם האינטגרל הבא מתכנס הפונק' נקראת אינט' בהחלט:

$$\int_a^{\infty}\left|f_{(x)}\right|dx=const_2$$

החלפת קואורדינטות באינטגרל כפול:

$$\iint_D f_{(x,y)}dxdy=\iint_D f_{(x(u,v),y(u,v))}\cdot|J|\cdot dudv$$

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{dx}{du} & \frac{dx}{dv}\\ \frac{dy}{du} & \frac{dy}{dv}\end{vmatrix}\quad \frac{1}{J}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{du}{dx} & \frac{du}{dy}\\ \frac{dv}{dx} & \frac{dv}{dy}\end{vmatrix}$$

החלפת קואורדינטות באינטגרל משולש:

$$\iiint_D f_{(x,y,z)}dxdydz=\iiint_D f_{(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))}\cdot|J|\cdot dudvdw$$

$$J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix}x_u & x_v & x_w\\ y_u & y_v & y_w\\ z_u & z_v & z_v\end{vmatrix}\quad \frac{1}{J}=\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=\begin{vmatrix}u_x & u_y & u_z\\ v_x & v_y & v_z\\ w_x & w_y & w_z\end{vmatrix}$$

סוגי קואורדינטות

קואורדינטות קוטביות / פולריות (2 מימדים):

$$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,\ J=r$$

קואורדינטות ספריות / כדוריות (3 מימדים) (r,θ,φ):

$$x=r\sin\varphi\cos\theta,\ y=r\sin\varphi\sin\theta,\ z=r\cos\varphi,\quad J=r^2\cdot\sin\varphi, x^2+y^2+z^2=r^2$$

$$\cos\theta=\frac{z}{r}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\ ,\ \tan\varphi=\frac{y}{x}\ ,\ 0\le\varphi\le\pi\ ,\ 0\le\theta\le2\pi$$

φ - היא הזווית בין ציר Z לקרן שמחברת את הנקודה עם הראשית.

θ - הזווית בין החלק החיובי של ציר x והיטל הקרן על מישור xy.

r - היטל הקרן על מישור xy.

קואורדינטות גליליות (3 מימדים) (r,θ,z):

$$x=r\cos\theta\ ,y=r\sin\theta\ ,z=z\ ,J=r$$

$$x^2+y^2=r^2\ ,\ \tan\theta=\frac{y}{x}$$

r - הוא המרחק בין ההיטל של נק' על מישור xY בין הראשית.

θ- היא הזווית בין r לחלק החיובי של ציר x.

אינטגרל קווי מסוג ראשון

אם c קו חלק אז השטח מתחת לעקומה יהיה:

$$c\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ a\le t\le b\end{cases}\Rightarrow\int_C f(x,y)ds=\int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{\dot{x}_{(t)}^{2}+\dot{y}_{(t)}^{2}}dt$$

הערה: האינטגרל הקווי ביחס לאורך קשת אינו משתנה אם משנים את כיוון המסלול מ- a ל- b או מ- b ל- a.

ג. משווים ל- Q ומחלצים את g(y).

רוטור של שדה וקטורי:

$$curl\ \overline{F}=\nabla\times\overline{F}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\hat{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\hat{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\hat{k}$$

$$\nabla\times\overline{F}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

רוטור של שדה משמר תלת מימדי: $\nabla\times\overline{F}=0$.

דיברגנץ של שדה וקטורי:

$$div\ \overline{F}=\nabla\overline{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

הערה: גרדיאנט על וקטור – נותן סקלר. גרדיאנט על סקלר – נותן וקטור.

דיברגנץ של רוטור של שדה משמר תלת מימדי: $div\ curl\ \overline{F}=\nabla\cdot(\nabla\times\overline{F})=0$

משפט גרין:

אם בתחום D קיימות פונקציות P, Q והן בעלות **נגזרות חלקיות ורציפות** (מסדר ראשון) אז מתקיים:

$$\oint_C\overline{F}(x,y)d\overline{r}=\oint_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial x}\right)ds$$

$$\oint_C\overline{F}(x,y)d\overline{r}=\iint_D\nabla\times\overline{F}\cdot\hat{k}\ ds$$

הערה: את K נחליף בהתאם למישור עליו נטיל את הפונקציה.

פרמטריזציה של קו ישר:

$$\vec{r}_0=(x_0,y_0)\quad \vec{r}_1=(x_1,y_1)$$
$$C:\vec{r}(t)=(1-t)\cdot\vec{r}_0+t\cdot\vec{r}_1=(X(t),Y(t))$$
$$0\le t\le 1$$

שדה וקטורי:

$$\bar{F}=P(x,y,z)\hat{i}+Q(x,y,z)\hat{j}+R(x,y,z)\hat{k}$$

Q, P, R – פונקציות סקלריות הנקראות פונקציות רכיב של השדה הוקטורי.

וקטור גרדיאנט:

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$

שדה רציף: אם בכל נקודה Q, P, R רציפות אז השדה הוקטורי רציף.

שדה משמר: אם קיימת f(x,y,z) סקלרית שמקיימת:

$$\bar{F}(x,y,z)=\nabla f \qquad \nabla\times\bar{F}=0$$

אינטגרל קווי מעל שדה:

$$c=\begin{cases}\bar{r}(t)=x(t)\hat{i}+y(t)\hat{j}\\ a\le t\le b\end{cases}$$

$$\int_C \bar{F}(x,y)d\bar{r}=\int_a^b \bar{F}(x(t),y(t))\cdot\bar{r}'(x(t),y(t))\,dt=\int_a^b (F\ \hat{i}\cdot\frac{dx}{dt}+F\ \hat{j}\cdot\frac{dy}{dt})dt$$
$$\int_C \bar{F}(x,y)d\bar{r}=\int_c P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

אינטגרל קווי מעל שדה משמר (F הוא השדה ו- f הוא הפוטנציאל):

$$\int_C \bar{F}(x,y)d\bar{r}=\int_C \nabla f\cdot d\bar{r}=f(\bar{r}(a))-f(\bar{r}(b))=f(x_b,y_b)-f(x_a,y_a)$$
$$\oint_C \bar{F}(x,y)d\bar{r}=0$$

אינטגרל קווי מעל שדה משמר אינו תלוי במסלול.

אינטרגל על עקומה סגורה = 0, אם ורק אם:

מתקיים שדה משמר - $P_y=Q_x,\ P_z=R_x,\ R_y=Q_z$

וגם מתקיים - תחום פשוט קשר ורציף:

א. תחום כשיר - קו בין 2 נקודות מהתחום יעבור כולו בתוך התחום.
ב. על עקומה סגורה בתחום מכילה רק נקודות של התחום(מחילה ומסתיימת באותה הנק').
ג. התחום ללא חורים לא מורכב מ- 2 חלקים או יותר, והוא בעל שפה סגורה.

מציאת פונקצית הפוטנציאל f, מתוך שדה נתון:

א. מבצעים אינטגרל על P כפונקציה של x ומקבלים ביטוי הכולל את g'(y).
ב. גוזרים את P כפונקציה של y.

מישור משיק למשטח

נורמל למשטח בנקודה מסוימת הוא מכפלה וקטורית בין הוקטורים המשיקים בנק':

$$\bar{r}_u=\frac{\partial x(u,v)}{\partial u}\cdot(u_0,v_0)\ \hat{i}+\frac{\partial y(u,v)}{\partial u}\cdot(u_0,v_0)\ \hat{j}+\frac{\partial z(u,v)}{\partial u}\cdot(u_0,v_0)\ \hat{k}$$
$$\bar{r}_v=\frac{\partial x(u,v)}{\partial v}\cdot(u_0,v_0)\ \hat{i}+\frac{\partial y(u,v)}{\partial v}\cdot(u_0,v_0)\ \hat{j}+\frac{\partial z(u,v)}{\partial v}\cdot(u_0,v_0)\ \hat{k}$$

$$\bar{N}=\bar{r}_u'\times\bar{r}_v'=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\ \frac{\partial x}{\partial u}&\frac{\partial y}{\partial u}&\frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v}&\frac{\partial y}{\partial v}&\frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}\qquad \left|\bar{r}_u'\times\bar{r}_v'\right|=\sqrt{\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2}\qquad \bar{n}=\frac{N}{|N|}$$

משוואת מישור בנקודה (x_0,y_0,z_0):

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$
$$\bar{N}=(A,B,C)$$

על מנת למצוא משוואת מישור משיק למשטח בנק' ספציפית, נמצא קודם נורמל למישור בנקודה זו ואח"כ נשתמש במקדמי הנורמל למצוא את המישור.

משטח חלק: **קיים למשטח וקטור נורמל בכל נקודה.** אם בנקודה מסוימת של המשטח הוקטורים המשיקים מקבילים זה לזה, אז למשטח אין וקטור נורמל בנקודה, והמשטח עצמו **לא** חלק.

משטח מכוון:

- בכל משטח חלק ניתן לבחור את וקטור הנורמל ל- 2 כיוונים שונים. **הכיוון החיובי של הנורמל יקבע לפי הכיוון החיובי של אחד הצירים.**
- אם המשטח S הוא משטח סגור אז המשטח S הוא בעל כיוון חיובי אם וקטור הנורמל שלו מכוון מן **המשטח החוצה.**

הצגת משטחים

1. הצגה וקטורית / פרמטרית:
   א. הגדרת משטח פרמטרי בקואורדינטות קרטזיות:
   $$\bar{r}(u,v)=x(u,v)\ \hat{i}+y(u,v)\ \hat{j}+z(u,v)\ \hat{k}$$
   ב. הגדרת משטח פרמטרי בקואורדינטות כדוריות:
   $$\bar{r}(\varphi,\theta)=R\sin\varphi\cos\theta\ \hat{i}+R\sin\varphi\sin\theta\ \hat{j}+R\cos\varphi\ \hat{k}$$
2. $f(x,y,z)=0$ (z תלוי ב- x ו- y).
3. $z=f(x,y)$

הערה:

$$f(x,y,z)=z-g(x,y)=0\quad \nabla\bar{f}=(\frac{df}{dx},\frac{df}{dy},\frac{df}{dz})=(\frac{dg}{dx},\frac{dg}{dy},-1)$$

z תלוי ב- x, y רק כאשר $z=g(x,y)$.

נורמלים

1. עבור משטח הנתון בצורת $S:\bar{r}(u,v)$: $\hat{n}=\pm\frac{\vec{r}_u'\times\vec{r}_v'}{\left|\vec{r}_u'\times\vec{r}_v'\right|}$
2. עבור משטח הנתון בצורת $S:f(x,y,z)$: $\hat{n}=\pm\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$
3. עבור משטח הנתון בצורת $S:z=g(x,y)$: $\hat{n}=\pm\frac{(-g_x',-g_y',1)}{\sqrt{(-g_x')^2+(-g_y')^2+1}}$

שטח של משטח

$$ds=\frac{1}{\left|\bar{n}\cdot\hat{k}\right|}dxdy$$

$\left|\bar{n}\cdot\hat{k}\right|$ - זהו רכיב הגודל (בערך מוחלט) של נורמל היחידה בכיוון k.

הערה: כל הנוסחאות מתאימות להטלת המשטח על מישור xy.

1. משטח הנתון בצורת $S:\bar{r}(u,v)$:
$$A(s)=\iint_D\left|\bar{r}_u'\times\bar{r}_v'\right|ds=\iint_D\sqrt{\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2}\ dudv$$
$$=\iint_D\sqrt{EG-F^2}\ dudv\quad E=\left|\vec{r}_u'\right|^2\quad G=\left|\vec{r}_v'\right|^2\quad F=\vec{r}_u'\cdot\vec{r}_v'$$

2. משטח הנתון בצורת $S:f(x,y,z)$:
$$A(s)=\iint_D\frac{1}{\left|\bar{n}\cdot\hat{k}\right|}dxdy=\iint_D\frac{1}{\frac{\left|\nabla f\cdot\hat{k}\right|}{|\nabla f|}}dxdy=\iint_D\frac{|\nabla f|}{\left|f_z'\right|}dxdy$$

2. משטח הנתון בצורת $S:f(x,y,z)$:
$$n=\frac{\nabla f}{|\nabla f|}\Rightarrow\iint_S\bar{F}\cdot\bar{n}\ ds=\iint_D\frac{(P\cdot f_x'+Q\cdot f_y'+R\cdot f_z')}{\left|f_z'\right|}dxdy$$

3. משטח הנתון בצורת: $S:z=g(x,y)$:
$$\bar{n}=\frac{-\frac{\partial g}{\partial x}\hat{i}-\frac{\partial g}{\partial y}\hat{j}+1\cdot\hat{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2+1}}\Rightarrow\iint_S\bar{F}\cdot\bar{n}\ ds=\iint_D\left(-P\frac{\partial g}{\partial x}-Q\frac{\partial g}{\partial y}+R\right)dxdy$$

הערה: יש לשים לב לכיוון הנורמל!

משפט סטוקס

אם שדה וקטורי F מוגדר ע"י פונקציות רכיב P, Q, R שהן בעלות נגזרות חלקיות ורציפות (מסדר ראשון) בתחום שמגביל את המשטח אז:

$$\oint_C\bar{F}\ d\bar{r}=\iint_S(\nabla\times\bar{F})\cdot\bar{n}\cdot ds$$

כיוון האינטרגל על העקומה c נקבע ע"פ כלל יד ימין ביחס לנורמל של המשטח S.

אם קיימים 2 משטחים שונים, שמקיימים את משפט סטוקס, ואם למשטחים קיימת אותה שפה – אז:

$$\iint_{S_1}\nabla\times\bar{F}\ ds=\oint_C\bar{F}\ d\bar{r}=\iint_{S_2}\nabla\times\bar{F}\ ds$$

משפט גאוס / הדיברגנץ

$$\iint_S\bar{F}\ d\bar{s}=\oiiint_E\nabla\cdot\bar{F}\ dV$$

הערה: E הוא בהכרח תחום סגור.

נוסחאות שימושיות

1. $|a+b|\le|a|+|b|$

3. משטח הנתון בצורת $S: z = f(x, y)$:

$$A(s) = \iint_D \frac{1}{|\bar{n} \cdot \hat{k}|} dxdy = \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial(z)}{\partial(x)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z)}{\partial(y)}\right)^2 + 1}\, dxdy$$

אינטרגל משטחי

הערה: כל הנוסחאות מתאימות להטלת המשטח על מישור xy.

1. משטח נתון בצורת משוואה וקטורית $S: \bar{r}(u, v)$:

אם המשטח חלק:

$$\iint_S f(x, y, z) ds = \iint_D f(\bar{r}(u, v)) \cdot |\bar{r}_u' \times \bar{r}_v'|\, dudv$$
$$= \iint_D f(x_{(u,v)}, y_{(u,v)}, z_{(u,v)}) \cdot \sqrt{EG - F^2}\;\; dudv$$

2. משטח הנתון בצורת $S: f(x, y, z)$:

$$\iint_S f(x, y, z) ds = \iint_D f(x, y, g(x, y)) \cdot \frac{|\nabla f|}{|f_z'|} dxdy$$

3. משטח הנתון בצורת $S: z = g(x, y)$:

$$\iint_S f(x, y, z) ds = \iint_D f(x, y, g(x, y)) \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\, dxdy$$

הערה: ניתן לקבל נוסחא אנלוגית לזו אם ניתן להטיל את הפונקציה על מישור אחר מ- xy.

אינטגרל משטחי של שדות וקטוריים (שטף)

$$\iint_S \bar{F} \cdot d\bar{s} = \iint_S \bar{F} \cdot \bar{n}\, ds = \iint_S \bar{F} \cdot \bar{n} \cdot \frac{1}{|\bar{n} \cdot \hat{k}|} dxdy$$

הערה: כל הנוסחאות מתאימות להטלת המשטח על מישור xy.

1. משטח הנתון בצורת $S: \bar{r}(u, v)$:

$$\bar{n} = \frac{\bar{r}_u \times \bar{r}_v}{|\bar{r}_u \times \bar{r}_v|} \Rightarrow \iint_S \bar{F} \cdot \bar{n}\, ds = \iint_D \bar{F}(\bar{r}(u, v)) \cdot (\bar{r}_u \times \bar{r}_v)\, dudv$$

$|a \cdot b| \le |a| \cdot |b|$

2. $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

3. $\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}\,, \quad a_1, \ldots, a_n \ge 0$

4. $|\sin a| \le |a| \quad |\sin b - \sin a| \le |b - a|$

5. $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)\,, \;\; 0 < a < c < b$

6. $\sqrt[n]{Const} \xrightarrow{n\to\infty} 1 \quad \sqrt[n]{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$

7. $b^n \ge n^b \quad b > 1$
$\frac{n^b}{b^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

8. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad \lim_{y\to 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = e \qquad \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

9. $\cos(90 - \alpha) < \alpha \quad \cos(\alpha) < \alpha - 90$

10. $\ln x < x$

11. $\sqrt[n]{a^n + b^n} \to a \quad a > b$

12. **לופיטל:** במצב של $\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, 0 \cdot \pm\infty$: $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

אם ע"י לופיטל לא מקבלים גבול הדבר אינו אומר שבאמת אין גבול, אלא צריך לנסות אחרת.

13. במצב של ∞^0 או 0^0 בלבד:

$$\lim_{x\to 0} x^X \Rightarrow y = x^x \Rightarrow \ln y = x \ln x \Rightarrow \lim_{x\to 0} x \ln x = 0 \Rightarrow$$
$$\lim_{x\to 0} \ln y = 0 \Rightarrow \ln(\lim_{x\to 0} y) = \ln 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0} y = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0} x^X = 1$$

או:

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = 1$$

14. 1^∞ - a, b – כפונקציה של X: $\lim_{x\to 0} a^b = e^{\lim_{x\to 0} (a-1)\cdot b}$

15. $(a^{x^\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha - 1} \cdot a^{x^\alpha} \cdot \ln a$

16. $a = \lim a_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a) \cdot b_n + a \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

17. $\ln a + \ln b = \ln(a \cdot b)$

18. $\ln(x) < x \quad , \quad \ln(x+1) < x$

19. $x \ge 3 \Rightarrow \ln(x) > 1$

20. $n! < n^n$