

המספר הקסום פאי π

המספר π במתמטיקה (האות היוונית פִּי, או פֶּאִי לפי ההיגוי האנגלי) הוא מספר טהור המייצג את היחס הקבוע (בגיאומטריה האוקלידית) בין היקף המעגל לקוטרו. π הוא קבוע מתמטי שמופיע בנוסחאות רבות במתמטיקה ובפיזיקה. הערך מסומן כ- π משום שהוא משמש לחישוב היקף מעגל: האות π היא הראשונה במילה היוונית " $\pi\epsilon\rho\acute{\iota}\mu\epsilon\tau\rho\omicron\varsigma$ " (פרימטרוס, באנגלית Perimeter) שמשמעותה היקף.

חמישים הספרות הראשונות של הייצוג העשרוני של π הן:
3.14159265358979323846264338327950288419716939937510

תכונות

π הוא מספר אי רציונלי, כלומר אינו ניתן לכתיבה כיחס בין שני מספרים שלמים. תכונה זו הוכחה בשנת 1761 על ידי יוהאן היינריך למברט.

המחשה של ערכו של פאי בקירוב

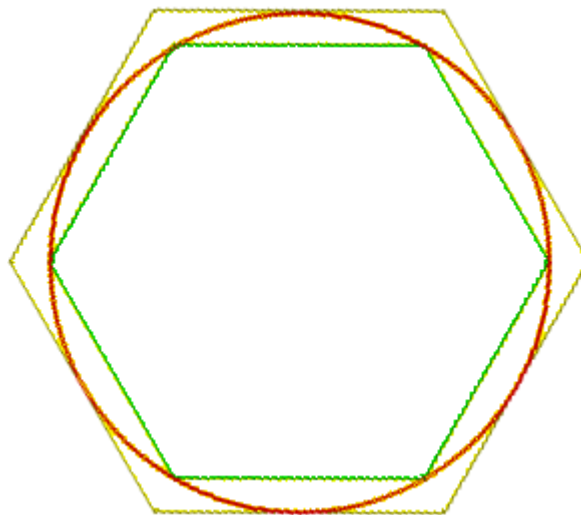
בשנת 1882 הוכיח פרדיננד לינדמן ש- π הוא מספר טרנסצנדנטי. מהוכחה זו נובע ש- π אינו ניתן להצגה תוך שימוש במספר סופי של מספרים שלמים, שברים או שורשים שלהם. כתוצאה מהוכחה זו נובע שלא ניתן, באמצעות בנייה בסרגל ומחוגה, לבנות ריבוע השווה בשטחו לעיגול נתון.

חישוב π

חישוב ערך מדויק יותר ויותר של π היווה אתגר במשך מאות שנים.

פאי שווה להיקף מעגל שקוטרו 1

צורת השבר הפשוטה ביותר המקרבת את π , היא $22/7$. קירוב מקובל של π כמספר עשרוני הוא 3.14. קירובים אלה מתלכדים עם ערכו האמיתי של π בדיוק של שתי ספרות בלבד מימין לנקודה.



קירובים לפאי היו ידועים עוד בבבל ובמצרים העתיקה, אך ארכימדס הציג לראשונה שיטה המאפשרת לחשב את π בכל רמת דיוק שתידרש. שיטתו מתבססת על כך שהיקף המעגל קטן מהיקפו של מצולע החוסם את המעגל וגדול מהיקפו של מצולע החסום במעגל. באמצעות חישוב ההיקף של מצולע חוסם ומצולע חסום בעלי מספר הולך וגדל של צלעות נשיג דיוק גדל והולך של היקף המעגל, ובהתאם לכך דיוק גדל והולך של π . ארכימדס הפעיל את שיטתו על משושה, ובהדרגה הכפיל את מספר הצלעות. מצולע בן 96 צלעות הביא את ארכימדס לתוצאה

$$3^{10/71} < \pi < 3^{1/7}$$

דיוק בן שש ספרות אחרי הנקודה הושג במאה ה-16 על-יד ההולנדי אדריאן אנטוניזון, שהציג את π באמצעות השבר $355/113$.

ההצגה של פאי כשבר משולב פותחת ב-

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, \dots].$$

הצגה זו מספקת סדרה של קירובים, שהראשון מביניהם הוא הערך השלם 3, ואחריו באים:

$$22/7, 333/106, 355/113, 104348/33215, 1043835/332263, \dots$$

כדרכם של שברים משולבים, אלו קירובים אופטימאליים, במובן הבא: מבין כל השברים בעלי מכנה שאינו עולה על 7, הקרוב ביותר לפאי הוא $22/7$; מבין כל השברים בעלי מכנה שאינו עולה על 106, הקרוב ביותר לפאי הוא $333/106$; וכן הלאה.

בתחילת המאה ה-15 חישב אל-קאשי, מתמטיקאי ואסטרונום פרסי, את 2π בדיוק של 9 ספרות בבסיס סקסגסימלי, דיוק השקול ל-16 ספרות בבסיס עשרוני.

בשנת 1596 השתמש ההולנדי לודולף ואן צאולן בשיטתו של ארכימדס, וחישב את π בדיוק של 20 ספרות, וכעבור שנים אחדות הגיע לדיוק של 35 ספרות. הוא היה כל כך גאה בהישג זה, עד שציווה לכתוב ספרות אלה על מצבתו. גם הגרמנים התרשמו מאוד מהישג זה, וקראו ל- π בשם **מספר לודולף**.

התפתחות החשבון האינפיניטסימאלי במאה ה-17 הביאה שיטות חדשות לחישובו של π , שיטות המתבססות על ייצוגו של π כסכום של טור אינסופי.

בשנת 1789 חישוב הסלובני יורי וגה את 140 הספרות הראשונות של π (רק 137 מתוכן היו נכונות).

השתכללות המחשבים ומציאת אלגוריתמים יעילים יותר לחישובו של π הביא לשיא של (ספטמבר 2002) - חישוב 1,241,100,000,000 ספרות, באמצעות מחשב-על מתוצרת היטאצ'י. מובן שלתוצאה זו אין כל ערך מעשי, מלבד הפגנת מהירותם של מחשבי-על ושל אלגוריתמים.

טכניקה לא שגרתית לחישובו של π היא "שיטת מונטה-קרלו": על לוח עץ נצייר ריבוע שאורך צלעו שתי יחידות. נצייר מעגל חסום בריבוע זה (זהו מעגל שרדיוסו שווה ליחידה אחת), ונתחיל להטיל חיצים אל הריבוע (לא נכוון את החץ למרכז הריבוע, אלא אל הריבוע כולו, באופן אקראי). לאחר מספר רב של הטלות, היחס בין מספר הפעמים שהחצים פגעו בתוך המעגל, למספר הפעמים שבהם פגעו בתוך הריבוע שואף ליחס שבין שטחי שתי הצורות, שהוא $\pi / 4$.

הדוגמה הראשונה לרעיון זה היא שיטת המחט של בופון: כאשר מטילים מחט על משטח שמצוירים עליו קווים ישרים מקבילים שהמרחק ביניהם שווה לאורך המחט, הסיכוי שהמחט תיגע בקווים שווה ל- $2/\pi$. ב- 1777 ז'ורז' לואי לה קלרק, הרוזן בופון, ביצע את הניסוי כדי להעריך את ערכו של פאי. הניסוי עורר את עניינם של המתמטיקאים בני התקופה, והביא לדיון ער בהבנת מושג ההסתברות.

נוסחאות הקשורות ב- π

פאי מופיע בנוסחאות מתמטיות רבות. ניתן לצפות שיופיע בנוסחאות הקשורות לשטחי ונפחי צורות מעגליות, שכן הוא מוגדר באמצעות מעגל, אך לעתים הוא מתגלה גם בתחומים שלכאורה אין בינם ובין גיאומטריה או מעגלים קשר ישיר.

גיאומטריה

$$C = 2\pi r \quad \text{היקף מעגל}$$

$$A = \pi r^2 \quad \text{שטח עיגול}$$

$$A = \pi ab \quad \text{שטח של אליפסה}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{נפח של כדור}$$

$$A = 4\pi r^2 \quad \text{שטח פנים של כדור}$$

$$V = \pi r^2 h \quad \text{נפח של גליל}$$

$$A = 2(\pi r^2) + (2\pi r)h = 2\pi r(r + h) \quad \text{שטח פנים של גליל}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \quad \text{נפח של חרוט}$$

$$A = \pi r\sqrt{r^2 + h^2} + \pi r^2 = \pi r(r + \sqrt{r^2 + h^2}) \quad \text{שטח פנים של חרוט}$$

הפולקלור של π

יש החוגגים את ה-14 במרץ (שנרשם כ-3.14) כיום פאי, ואחרים המסתפקים ביום קירוב הפאי ב-22 ביולי (הוא 22/7). מהדרי ה"חג" חוגגים אותו בדרך כלל בשעה 1:59 אחר הצהריים (3.14159). ביום פאי של שנת 2004 קבע הגאון-האוטיסט דניאל טאמט שיא אירופי בדקלום המספר, כאשר דקלם אותו עד הספרה ה-22,514 שלו. השיא העולמי בדקלום פאי שייך ללו צ'או מסין שב-20 בנובמבר 2005 דקלם ללא שגיאה 67,890 ספרות.

ב-1998 הופק סרט בשם Pi.

דונלד קנות, מדען המחשב הנודע, ממספר את הגרסאות של תוכנת TeX כך שיילכו ויתקרבו ל- π : גרסה 3, גרסה 3.1, גרסה 3.14 וכו'. הגרסה הנוכחית היא 3.141592.

נקודת פיינמן הוא כינוי למקומות מספר 762 עד 767 בפיתוח העשרוני של פאי. כל המקומות האלו מכילים את הספרה 9. משערים שפאי הוא מספר נורמאלי (דהיינו, הספרות בפיתוח העשרוני שלו מופיעות באופן אקראי כביכול), ואם כך אז הפיתוח העשרוני שלו כולל כל רצף ספרות סופי. עם זאת, מפתיע למצוא שש ספרות זהות רצופות בשלב כה מוקדם של הפיתוח. לשם השוואה, הרצף הדומה הבא, ששה מופעים רצופים של הספרה 8, מתחיל בספרה ה-222,299.

השם "נקודת פיינמן" ניתן בעקבות משאלה של הפיזיקאי ריצ'רד פיינמן, לזכור בעל-פה את הפיתוח העשרוני של פאי עד לשלב שבו יוכל לומר "... תשע, תשע, תשע, תשע, תשע, תשע, וכן הלאה".