פילוסופיה של המתמטיקה

הפילוסופיה של המתמטיקה היא ענף של הפילוסופיה העוסק בהנחות היסוד של המתמטיקה ובמשמעותה של המתמטיקה. הפילוסופיה של המתמטיקה מנסה לתת תשובות לשאלות כגון:

- "האם המתמטיקה היא תגלית או המצאה?"
- "מדוע המתמטיקה שימושית בתיאור היקום?"
- "באיזה מובן, אם בכלל, עצמים בסיסיים של המתמטיקה, כמו מספרים קיימים?"
- "האם משפטים מתמטיים נכונים ובאיזה אופן?"

'

היחס לפילוסופיה הכללית

כמה פילוסופים של המתמטיקה רואים את תפקידם כתיאור של המצב של המתמטיקה כפי שהיא, כפירוש ולא כביקורת. אך לביקורת יכולה להיות השפעה ממשית על המחקר המתמטי, ולפיכך הפילוסופיה של המתמטיקה יכולה להיות משמעותית ביותר עבור מתמטיקאים בפועל, במיוחד בתחומים חדשים שבהם עדיין אין בדיקה טובה של ההוכחות המתמטיות על ידי חוקרים רבים, ולכן ייתכן כי ימצאו טעויות. ניתן למצוא טעויות כאלה רק אם יודעים היכן לחפש אותן, ואיפה הגיוני שיעלו. נושא זה הוא אחד מהתפקידים החשובים של הפילוסופיה של המתמטיקה.

בעשורים האחרונים, יש שניסו לקשר בין המתמטיקה לבין עניינים פילוסופיים אחרים, כגון אפיסטמולוגיה ואתיקה. עניינים אלה נדונים בסוף הערך.

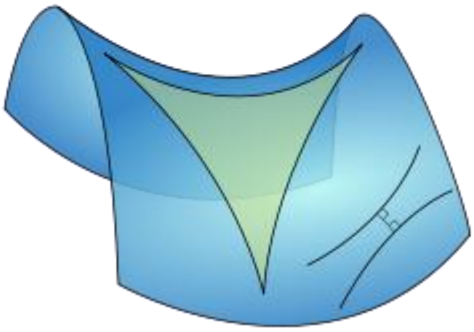
התפתחות המתמטיקה: תגלית או המצאה?

השאלה האם התפתחות המתמטיקה, כפי שהיא מתבטאת בהעלאת השערה חדשה או במציאת הוכחה חדשה, היא בגדר תגלית או בגדר המצאה, העסיקה את המתמטיקאים בסוף המאה ה-19 ותחילת המאה ה-20, אם כי שורשיה מגיעים עד לאריסטו ואפלטון.

מצד אחד מתקיימת הגישה לפיה כל העצמים המתמטיים (משפטים, הוכחות וכדומה), אלה הידועים לנו וגם אלה שאינם ידועים לנו, קיימים ב"חלל וירטואלי" כלשהו, וכל שנותר הוא לגלות אותם. בהתאם לגישה זו, ניסוח משפט חדש הוא בגדר תגלית, וכך גם ביחס להוכחתו. בהתאם לכך, התפתחותה של המתמטיקה אינה אלא התפתחות הידע האנושי אודות המתמטיקה. עם המתמטיקאים הבולטים שהחזיקו בדעה זו נמנים קנטור והארדי. ז'אק האדאמר, מחשובי המתמטיקאים בצרפת, אמר: "אף שהאמת עדיין אינה ידועה לנו, היא קיימת מלכתחילה, וכופה עלינו את הדרך שעלינו ללכת בה". גישה זו ידועה בשם פלאטוניזם, על שם "ספירת האידיאות" של אפלטון.

רבים מתקוממים נגד גישה זו, משום שברור שלא דומה "גילוי" ההוכחה למשפט האחרון של פרמה לגילוי אי באוקיינוס או גילוי צמח שלא היה מוכר קודם לכן. ההוכחה למשפט האחרון של פרמה כרוכה בעבודת יצירה רבה מאוד, ולטעון שהיא הייתה קיימת ורק היה צריך לגלות אותה אינו רחוק מלטעון ששיר חדש אינו יצירה של המשורר אלא גילוי של השיר ב"ים כל המחרוזות המילוליות". בהתאם לגישה זו, המתמטיקה כולה היא יצירה של המוח האנושי, ואינה קיימת בלעדיו. ביטוי נחרץ לגישה זו נתן המתמטיקאי הגרמני לאופולד קרונקר, באומרו: "אלוהים ברא את המספרים הטבעיים, כל היתר הוא מעשה ידי אדם". עם המתמטיקאים הבולטים שהחזיקו בדעה זו נמנים גם ריכארד דדקינד וקארל ויירשטראס. גם הפילוסוף לודוויג ויטגנשטיין החזיק בדעה שהמתמטיקאי הוא ממציא, ולא מגלה.

מדוע המתמטיקה עובדת?



משולש על משטח בגיאומטריה היפרבולית. פיתוח הגיאומטריה הלא אוקלידית העקבית במאה ה-19 הדגיש את חשיבותו של השימוש באקסיומות כנגד החשיבה האינטואיטיבית.

בפילוסופיה של המתמטיקה יש כמה אסכולות, שמתמקדות בשאלות מטאפיזיות, כלומר: "מדוע המתמטיקה פועלת?", ובשאלה קשורה אך שונה מבחינה לוגית, "מדוע המתמטיקה מסבירה בצורה כל כך טובה את העולם הפיזי כפי שאנו רואים אותו?"

התשובה לשאלה זו אינה מובנת מאליה. בעקבות עבודתו של דוויד הילברט, נהוג היום לראות את המתמטיקה כתורה המטפלת במודלים אקסיומטיים, שבהם האקסיומות נבחרות באופן שרירותי, בלי קשר למציאות, רק בתנאי שיהיו עקביות. גישה זו זכתה לחיזוק בעקבות גילויה/המצאתה של גיאומטריה לא אוקלידית, שבה אקסיומת המקבילים שונה מזו של הגיאומטריה האוקלידית. שתי הגיאומטריות הללו תקפות מתמטית בדיוק באותה מידה, אולם סביר שרק אחת מהן מתארת את המציאות. ובכל זאת - כאשר נותנים למודל את הפשר המתאים מקבלים לא רק תיאור מצוין של המציאות, אלא גם את היכולת לחזות תופעות באמצעות חקירת המשוואות ודדוקציה מתמטית של משפטים ומסקנות מהאקסיומות. דבר זה בא לידי ביטוי בשימוש בתורת המספרים לייצג את החשבון היומיומי שאנו עושים בהוספת והחסרת דברים, ובהסתמכות של כל תיאוריה פיזיקאלית כיום על משוואות מתמטיות שמתארות את האינטראקציות והקינמאטיקה (תנועה) של הגופים.

היטיב לבטא בעיה זו הפיזיקאי אלברט איינשטיין שתהה "כיצד ייתכן שהמתמטיקה, שאיננה אלא פרי מחשבת האדם, ללא תלות בניסיון ובהסתכלות, מסתגלת כל כך יפה למציאות?" תשובתו הייתה: "במידה שחוקי המתמטיקה מתייחסים למציאות, הם אינם ודאיים; ובמידה שהם ודאיים, הם אינם מתייחסים למציאות".

פתרון חלקי לבעיה זו הציג הפילוסוף עמנואל קאנט. על פי קאנט טענות המתמטיקה הם "סינתטי א-פריורי", כלומר: טענות אינפורמטיביות שאינן תלויות בניסיון (ואף קודמות לכל ניסיון). טענות אלה אינן מוסרות מידע לגבי העולם כשלעצמו, אבל הן כן מוסרות מידע על העולם כפי שהוא נתפש בניסיוננו, כלומר - העולם דרך משקפי "התבונה הטהורה". המתמטיקה איננה חוקי העולם אלא חוקי ההיגיון או חוקי התבונה שדרכם תופש המוח האנושי את העולם הסובב אותנו ומארגן את צבר התחושות שהוא קולט לכלל ניסיון או מציאות עקביים.

יסודות המתמטיקה ומקור הוודאות שלה

שלוש אסכולות — אינטואיציוניזם, לוגיציזם ופורמליזם — התפתחו בתחילת המאה ה-20 כתגובה להבנה המחלחלת יותר ויותר, כי המתמטיקה (כפי שהייתה אז), והאנליזה בעיקר, אינה עומדת בקריטריונים של החומרה הלוגית והוודאות, שהייתה אמורה לעמוד בהם. כל אסכולה מתייחסת לנושאים שעלו באותו זמן, כשהיא מנסה לפתור אותם או לטעון שהמתמטיקה אינה זכאית למעמד שלה כתחום המכיל את הידע הוודאי ביותר שנוכל להשיג.

עם דעיכתה של הוודאות המתמטית, שאלת היסודות המקוריים של המתמטיקה ("איזה ענף במתמטיקה הוא זה הבסיסי, שממנו כל שאר הענפים צומחים?") נוסחה מחדש כחקירה פתוחה של יסודות המתמטיקה עם היסמכות על מושגי יסוד מסוימים כגון סדר, וכך עלה התחום מטא-מתמטיקה, שאפשר להגדירו פשוט כ"מתמטיקה שמועילה במחקר מטאפיזי על המתמטיקה".

נתייחס לאסכולות האלה בנפרד:

ריאליזם מתמטי, או פלאטוניזם

קורט גדל הפלאטוניסט עם חברו הטוב אלברט איינשטיין הפיזיקאי. גדל האמין שהמתמטיקה ממשית לא פחות מהפיזיקה

ריאליזם מתמטי טוען כי ישויות מתמטיות קיימות באופן עצמאי, גם מחוץ למוח האנושי. לפיכך, בני אדם אינם ממציאים את המתמטיקה, אלא מגלים אותה, וכל שאר הישויות האינטליגנטיות ביקום כנראה היו עושות דבר דומה. משתמשים במושג "פלאטוניזם", מכיוון שדעה כזו מקבילה לאמונתו של אפלטון ב"רעיונות שמימיים", מציאות בלתי משתנה אולטימטיבית, שהעולם היומיומי הוא רק קירוב לא מושלם שלה. דעותיו של אפלטון כנראה מגיעות מפיתגורס וחברי האסכולה שלו, "הפיתגוראים", שהאמינו כי העולם בנוי באופן ממשי ממספרים. לרעיון זה עשויים להיות מקורות קדומים יותר שאינם ידועים לנו.

מתמטיקאים חשובים רבים הם ריאליסטיים; הם רואים את עצמם כמגלים. כדוגמה אפשר לציין את פאול ארדש וקורט גדל. יש שנתנו הסברים פסיכולוגיים להעדפה הזו: כנראה שקשה מאוד לעסוק ולחקור משהו למשך תקופה ארוכה, אם אינך מאמין שהוא קיים. גדל האמין במציאות מתמטית אובייקטיבית, שניתן מבחינה עקרונית לחוש בה, בדומה לחישה רגילה. ישנם עקרונות מסוימים (לדוגמה, עבור כל שני דברים מתמטיים, יש אוסף של דברים שמורכבים בדיוק משני הדברים האלה) שאפשר לראות שהם אמת בצורה ישירה, אך יש השערות מסוימות, כמו "השערת הרצף", שייתכן שלא ניתן להחליט אם הן נכונות או לא. גדל הציע מתודולוגיה אמפירית למחצה שבעזרתה ניתן יהיה למצוא מספיק ראיות כדי להניח השערות כגון אלה.

הבעיה הגדולה ביותר של הריאליזם המתמטי היא זו: היכן ואיך הישויות המתמטיות האלה קיימות? האם יש עולם, נפרד לחלוטין מהעולם הפיזי שלנו, שבו קיימות הישויות המתמטיות? איך אפשר להגיע לעולם הזה ולגלות את האמת על הישויות האלה? ישנה ביקורת רבה על התשובות של אפלטון וגדל לשאלות אלו.

טענה חשובה בעד הריאליזם המתמטי, שנוסחה בידי ו. ו. קוויין והילארי פטנאם, היא "טענת ההכרחיות": המתמטיקה הכרחית עבור כל המדעים האמפיריים, ואם רוצים להאמין בתופעות המתוארות על ידי כל המדעים, יש להאמין גם במציאות של הישויות הנצרכות עבור התיאור הזה. בהתאם לפילוסופיה הכללית של קוויין ופטנאם, טענה זו היא נטורליסטית. היא טוענת לקיומן של הישויות המתמטיות כהסבר הטוב ביותר למה שאנו חווים, וכך הם מרוקנים את המתמטיקה, במידה מסוימת, מהמעמד האפיסטמי שלה.

רוב צורות הלוגיציזם (ראו להלן) הן צורות שונות של ריאליזם מתמטי. אינטואיציזם היא הדוגמה הקלאסית לפילוסופיה אנטי-ריאליסטית של המתמטיקה.

פטנאם התנגד נחרצות למושג "פלאטוניזם", בטענה שמושג זה מרמז על הוויה מסוימת, שאינה נצרכת במקרה המתמטי. הוא תומך בצורה של "ריאליזם טהור" שדוחה מושגים מיסטיים של אמת, ומקבלת הרבה אמפיריציזם-למחצה במתמטיקה. דוגמה של תיאוריה ריאליסטית שמתנגדת לפלאטוניזם היא תיאוריית השכל המוגשם (ראו להלן).

פורמליזם

על מצבתו של הילברט חרוטות המילים "אנחנו חייבים לדעת. אנחנו נדע." אידיאל זה התנפץ עם משפטי האי שלמות של גדל

הפורמליזם טוען כי אפשר לראות אמירות מתמטיות כאמירות על התוצאות של חוקי מניפולציה של מחרוזות (רצף של סימנים). לדוגמה, ב"משחק" של הגיאומטריה האוקלידית (שאפשר להבין אותה כמורכבת ממחרוזות מסוימות הקרויות "אקסיומות" ומכמה חוקים המייצרים מהמחרוזות הראשונות מחרוזות נוספות), אפשר להוכיח כי משפט פיתגורס מתקיים (כלומר, אפשר ליצור את המחרוזת המקבילה למשפט פיתגורס).

לפי כמה מהגרסאות של הפורמליזם, הנושא של המתמטיקה הוא בעצם רק הסימנים הרשומים עצמם. כל משחק שווה למשחק אחר, ואפשר רק לשחק את המשחקים, אך אי אפשר להוכיח דבר לגביהם. עם זאת, עמדה זו אינה פותרת את הבעיות האפיסטמיות (מהם סמלים? האם הם קיימים בעולם לא משתנה ונצחי?), אינה מסבירה את התועלת שבמתמטיקה, ועושה את המתמטיקה לפעילות חסרת ערך לחלוטין. גרסה זו של הפורמליזם אינה מקובלת ביותר.

גרסה שנייה של הפורמליזם ידועה כדדוקטיביזם. בדדוקטיביזם, משפט פיתגורס אינו אמת מוחלטת, אלא אמת יחסית: **אם** מייחסים משמעות למחרוזות כך שחוקי המשחק נעשים לאמיתיים (כלומר, אקסיומות הן אמירות נכונות, והחוקים שאיתם פועלים גם הם אמיתיים), **אז** יש לקבל את המשפט, או ליתר דיוק, הפירוש שניתן למשפט זה הוא כנראה אמת. ניתן לומר את אותו הדבר לגבי כל אמירה מתמטית. לפי גישה זו, הפורמליזם אינו טוען שהמתמטיקה היא רק משחק סמלים חסר משמעות. בדרך כלל אכן מקווים שיש פירוש כלשהו שבו חוקי המשחק הם אכן אמיתיים. שיטה זו מאפשרת למתמטיקאי להמשיך בעבודתו, ולהשאיר את הבעיות האלה לפילוסוף או למדען. פורמליסטים רבים טוענים כי למעשה המערכות האקסיומטיות שאותן יחקרו יהיו אלה שיועילו ביותר למדע או לתחומים מתמטיים אחרים.

אחד מהראשונים שהציעו את הפורמליזם היה דוויד הילברט, שמטרתו (תוכנית הילברט) הייתה להביא לאקסיומטיקה שלמה ועקבית (קונסיסטנטית). הילברט ביקש להראות את העקביות של המערכת המתמטית מההנחה כי ה"אריתמטיקה הפיניטארית" (כלומר, המספרים הטבעיים, שנחשבו כמקובלים על הכול מבחינה פילוסופית) היא עקבית. משפט האי שלמות השני של גדל הביא את תוכנית הילברט אל קִצה, כיוון שהראה כי מערכות אקסיומטיות גדולות אינן יכולות לעולם להוכיח את העקביות של עצמן. כיוון שכל מערכת אקסיומטית תכלול את המספרים הטבעיים כאקסיומה, משפט גדל מביא למסקנה כי אי אפשר להוכיח את העקביות של מערכת יחסית למספרים הטבעיים (שכן אז מוכיחים את העקביות של עצמו).

הילברט היה במקור דדוקטיביסט, אך כפי שאפשר לראות מההסבר שלנו, הוא חשב כי שיטות מטא-מתמטיות מסוימות מביאות לתוצאות משמעותיות, והוא היה ריאליסט ביחס למספרים הטבעיים. מאוחר יותר היה בדעה כי אין מטא-מתמטיקה משמעותית כלשהי, ולא משנה באיזה פירוש.

פורמליסטים מודרניים, כגון רודולף קרנפ, אלפרד טרסקי והסקל קורי, חושבים כי המתמטיקה היא חקירה של מערכות אקסיומטיות פורמליות. לוגיקנים מתמטיים חוקרים מערכות פורמאליות אך הם פעמים רבות פלאטוניסטים.

פורמליסטים הם בדרך כלל סובלניים למדי, ומזמינים גישות חדשות ללוגיקה, למערכות מספרים לא סטנדרטיות, גרסאות חדשות של תורת הקבוצות, וכו'. ככל שאנו משחקים יותר משחקים כן ייטב. אך בכל שלוש הדוגמאות האלה, המוטיווציה היא תמיד בשל התעניינות מתמטית או פילוסופית. ה"משחקים" אף פעם אינם נבחרים באופן שרירותי.

הבעיה העיקרית עם הפורמליזם היא שהרעיונות המתמטיים האמיתיים שמעסיקים מתמטיקאים אינם דומים כלל למשחקי המניפולציה הקטנים שתוארו למעלה. אם כי אפשר להגדיר הוכחות על ידי המושגים של המשחקים האלה, ההוכחות כמעט אף פעם אינן נעשות למעשה באופן הזה. הפורמליזם גם לא מסביר איזה מערכת אקסיומות יש לחקור.