תורת המספרים

תורת המספרים היא ענף של המתמטיקה העוסק בתחום רחב של נושאים, ששורשיהם בחקר התכונות של המספרים הטבעיים ...1,2,3.

בעיות רבות בתורת המספרים הן קלות לניסוח אך קשות מאוד לפתרון, וענפים נכבדים במתמטיקה מודרנית פותחו תוך ניסיון לפתור בעיות מסוג זה. דוגמאות ידועות הן המשפט האחרון של פרמה, השערת גולדבך (כל מספר זוגי (הגדול מ - 2) הוא סכום של שני ראשוניים), השערת הראשוניים התאומים (שלפיה יש אינסוף זוגות של ראשוניים שההפרש ביניהם הוא 2) והשערת מספרי מרסן הראשוניים (שלפיה יש אינסוף מספרי מרסן ראשוניים וכתוצאה מכך קיימים אינסוף מספרים משוכללים).

תחומים בתורת המספרים

ניתן לחלק את תורת המספרים לתחומים, על-פי אופי הבעיות הנדונות ושיטות הפתרון.

ב**תורת המספרים האלמנטארית** נחקרות תכונותיהם של המספרים השלמים ללא ניצולן של טכניקות מענפי מתמטיקה אחרים. שאלות הקשורות להתחלקות, האלגוריתם של אוקלידס למציאת מחלק משותף מקסימאלי, פירוק לגורמים ראשוניים, מספרים מושלמים וסדרות חשבוניות נמצאות בתחום זה. טענות טיפוסיות הן המשפט הקטן של פרמה ומשפט אוילר המכליל אותו, משפט השאריות הסיני, וחוק ההדדיות הריבועית, שהוכחתו חורגת כבר מן התחום האלמנטארי. נלמדות גם פונקציות אריתמטיות,כמו הפונקציה

ϕ של אוילר, שהן פונקציות המוגדרות על-פי תכונות מספריות.

תורת המספרים האנליטית משתמשת בכלים של חשבון אינפיניטסימאלי ופונקציות מרוכבות כדי להתמודד עם בעיות העוסקות בתכונותיהם של המספרים השלמים. כלים אלה הם שימושיים ביותר בחקר תכונותיהם של המספרים הראשוניים: משפט המספרים הראשוניים, משפט מרכזי המתאר את צפיפותם של מספרים אלה, הוכח באמצעות כלים אנליטיים, וכמוהו גם תוצאות רבות אחרות הקשורות בראשוניים (ב- 1949 מצאו פאול ארדש ואטלה סלברג הוכחה 'אלמנטארית' למשפט המספרים הראשוניים; הוכחה זו אינה משתמשת בכלים אנליטיים, אבל היא נחשבת למסובכת וקשה יותר מן ההוכחה האנליטית). השערת רימן היא בעיה פתוחה חשובה שצמחה מתורת המספרים האנליטית, ובעיות פתוחות כמו השערת גולדבך נחקרות באמצעים דומים.

ענף חשוב אחר בתורת המספרים האנליטית הוא תורת הקירובים הדיאופנטיים, העוסקת בקירובים רציונאליים למספרים אי-רציונאליים ומאפשרת לחקור את הפתרונות השלמים של משוואות כגון $y^2 = x^3 + 17$.

תורת המספרים האלגברית עוסקת בשלמים אלגבריים שהם הכללה של המספרים השלמים הרגילים: מספרים כמו $2 + 3\sqrt{5}$ או $\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ הם שלמים אלגבריים. למספרים אלה יש, בהנחות מסוימות,

תכונות דומות למספרים השלמים הרגילים, וניתן בעזרתם לתקוף ביתר-קלות בעיות בתורת המספרים.

ב**גיאומטריה אלגברית אריתמטית** חוקרים בעיות בתורת המספרים בכלים המשלבים גיאומטריה ואלגברה. האובייקטים העיקרים הנחקרים בתחום הם סכימות אריתמטיות. בתחום זה נודעת חשיבות מיוחדת לחקר עקומים אליפטיים והנקודות השלמות והרציונאליות עליהם; ההוכחה של ויילס למשפט האחרון של פרמה שייכת לתחום זה. השם **תורת המספרים הגיאומטרית** (או **גיאומטריה של מספרים**) מתייחס לתחום קלאסי יותר, בעיקר התורה של מינקובסקי הדנה בגיאומטריה של סריגים.

תורת המספרים החישובית עוסקת בחקר אלגוריתמים הרלוונטיים לתורת המספרים. לאלגוריתמים לבדיקה מהירה האם מספר נתון הוא מספר ראשוני ולפירוק לגורמים חשיבות גדולה בקריפטוגרפיה, תחום שהפך את תורת המספרים מענף עיוני לענף שימושי ביותר.

היסטוריה

המספרים הטבעיים מלווים את האדם משחר התרבות. לא ידוע מתי בדיוק נולד העניין בשאלות "מופשטות" הקשורות במספרים, שאלות שאינן קשורות ישירות בספירת עצמים. טבלאות בבליות קדומות, מהתקופה שבין 1900 ל-1600 לפנה"ס, דנות בשלשות פיתגוראיות, דהיינו מספרים שלמים המקיימים את התנאי $a^2 + b^2 = c^2$. טבלה מפורסמת בשם פלימפטון 322 שנחשבה בתחילה כמכילה רישום עסקאות מסחריות, היא למעשה רשימה מסודרת ומדויקת למדי של שלשות כאלה, אם כי אין זה ודאי שלכך היוונים כיוונו.

תורת המספרים זכתה לפריחה ביוון הקדומה, במיוחד בעבודותיהם של פיתגורס, אוקלידס ודיופנטוס.

תורמים בולטים לפיתוחו של ענף זה בעת החדשה הם פרמה, אוילר וגאוס.