<u>המשפט האחרון של פרמה</u>

המשפט האחרון של פרמה הוא משפט מפורסם בתורת המספרים שנוסח על ידי המתמטיקאי פייר דה פרמה באמצע המאה ה-17 ונותר כבעיה פתוחה עד שהוכח על ידי אנדרו ויילס בשנת 1995. במשך כ-350 שנים היה לאחת הטענות המפורסמות ביותר בעולם המתמטיקה שלא הוכחו.

המשפט טוען כי:

עבור n טבעי גדול מ-2, לא קיימים מספרים טבעיים (גדולים מ- 0 x,y,z (המקיימים את המשוואה: $x^n + y^n = z^n$.

למשוואה, הנובעת ממשפט פיתגורס $x^2 + y^2 = z^2$, אינסוף פתרונות שבהם x ,y ו-z הם מספרים שלמים, למשל $3^2 + 4^2 = 5^2$ או $5^2 + 12^2 = 13^2$. השאלה נהיית מורכבת כאשר היא מתייחסת למשוואה הכללית יותר $x^n + y^n = z^n$. האם לה יש פתרון בשלמים כאשר n גדול מ-2? במשך כ-350 שנה הייתה שאלה זו בגדר בעיה פתוחה במתמטיקה, כנראה המפורסמת מכולן.

<u>תולדות המשפט</u>

פייר דה פרמה

פייר דה פרמה (Fermat), מתמטיקאי צרפתי בן המאה ה-17, קבע, בערך בשנת 1637, שהתשובה לשאלה זו היא שלילית, אך לא נמצאה בכתביו הוכחה לכך. "גיליתי הוכחה נפלאה למשפט זה, אך שוליים אלו צרים מלהכילה", כתב פרמה בשולי ספרו של דיופנטוס, "אריתמטיקה", שתורגם ללטינית על ידי קלוד באשה. במשך מאות שנים דרבנה הערה זו מתמטיקאים וחובבי מתמטיקה לחפש הוכחה לטענתו של פרמה, שזכתה לכינוי **המשפט האחרון של פרמה** (המלה "אחרון" מציינת שזה המשפט האחרון שנותר להוכחה, לאחר שעד תחילת המאה התשע-עשרה הוכחו (או הופרכו) כל שאר המשפטים שניסח פרמה).

תחילת הדרך במסע לחיפוש ההוכחה כללה הוכחות למקרים פרטיים אחדים. בכתביו של פרמה נמצא גרעין של הוכחת נסיגה אינסופית למקרה הפרטי n=4, שפירושו שלמשוואה $x^4 + y^4 = z^4$ אין פתרון בשלמים. כמאה שנה לאחר מכן נתן לאונרד אוילר הוכחה למקרה הפרטי n=3. בשנת 1825 ניתנה הוכחה למקרה הפרטי n=5 על ידי לז'נדר, וכעבור ארבע-עשרה שנים נוספות הוכיח גבריאל לאמה (Lamé) את המשפט עבור n=7.

בשנת 1847 ניסה לאמה לתת הוכחה לנכונות המשפט האחרון של פרמה בשלמותו, אך הוכחתו נמצאה שגויה. עד לשנת 1857 הראה ארנסט אדוארד קומר שהמשפט האחרון של פרמה נכון לכל n קטן ממאה. למעשה הוכיח קומר יותר מכך: הוא הוכיח שמשפט פרמה נכון לכל מספר ראשוני רגולרי, אך הבדיקה האם ראשוני הוא רגולרי הצריכה חישובים רבים. השתכללות אמצעי החישוב במאה העשרים אפשרה להגדיל בהדרגה את מספרן של החזקות לגביהן נמצא משפט פרמה כנכון, וכך הושגו אבני דרך אחדות: בשנת 1937 נמצא המשפט נכון לכל החזקות עד 617, בשנת 1955 הוגבה הרף ל-4,001, בשנת 1976 ל-125,000, ובשנת 1992 הוכחה נכונות המשפט לכל חזקה עד ארבעה מיליון.

בשנת 1823 הוכיחה סופי ז'רמן שאם יש פתרון למשוואה של פרמה, חייב אחד הנעלמים להיות כפולה של החזקה, כל עוד החזקה קטנה ממאה. עבודה זו הוצגה בפני האקדמיה הצרפתית למדעים על ידי לז'נדר, משום שהאקדמיה מנעה מנשים להופיע בפניה. בשנת 1982 הוכח שהתוצאה אליה הגיעה סופי ז'רמן נכונה גם כל עוד החזקה קטנה מ-6 מיליארד. בנוסף, תיארה ז'רמן את המושג ראשוני ז'רמן והוכיחה את נכונות המשפט האחרון של פרמה עבור ראשוניים אלו.

במהלך שנות השמונים של המאה העשרים יצרו מתמטיקאים אחדים זיקה בין המשפט האחרון של פרמה ובין השערה בלתי מוכחת אחרת, השערת טניאמה-שימורה. על פי השערה זו, עבור כל עקום אליפטי המוגדר מעל הרציונאליים פונקצית L של העקום מתלכדת עם פונקצית L של תבנית מודולארית כלשהי. זיקה זו אומרת שמהוכחתה של השערת טניאמה-שימורה נובעת נכונותו של המשפט האחרון של פרמה.

אם $u^p + v^p = w^p$ היא דוגמה נגדית למשפט פרמה (כאשר p ראשוני ו- u,v,w מספרים שלמים), אז המשוואה $y^2 = x(x+u^p)(x-v^p)$ מתארת עקום אליפטי המוגדר מעל

הרציונאליים. משוואה זו נלמדה עוד לפני שהקשר בין משפט פרמה, תבניות מודולאריות ועקומים אליפטיים הובן במלואו, אך גרהארד פריי היה הראשון שהראה שעקום זה, אם הוא קיים, אינו מודולארי. ז'אן-פייר סר היה מי שהראה כיצד לקשר תבניות מודולאריות למשפט פרמה, על ידי מה שכונה "השערת האפסילון", שהוכחה מאוחר יותר, ב-1986, על ידי קן ריבט. עבודתו של ריבט הרחיקה מעבר להשערת האפסילון, כשהוא הראה שממשפט טניאמה-שימורה, אפילו אם הוא נכון רק במקרה ה"יציב למחצה", נובע המשפט האחרון של פרמה. למעשה, הדבר נתן אפשרות להוכיח בדרך השלילה את המשפט האחרון של פרמה, שכן מניחים מראש שהמשוואה שפרמה טען שלא קיימת דווקא קיימת, מוכיחים כי היא אינה מודולארית (בצורה ספציפית למשוואה זו) וכן שהיא מודולארית (על פי השערת טניימה שימורה) ולפיכך מגיעים לסתירה, והמסקנה היא שמשוואה זו לא קיימת.

עבודתו זו של ריבט הביאה את ויילס להפנות את עיקר מרצו להוכחת ההשערה של טניאמה ושימורה, מאחר שכעת היה ברור שהוכחה כזו תפתור גם את האתגר מן המאה השבע-עשרה, המשפט האחרון של פרמה.

בכנס שנערך בחודש יוני 1993 הציג אנדרו ויילס (Wiles), מתמטיקאי בריטי מאוניברסיטת פרינסטון שבארצות-הברית, הוכחה להשערת טניאמה-שימורה. במהלך ביקורת עמיתים התגלה פגם בהוכחה זו, אך פגם זה תוקן על ידי ויילס ותלמידו, ריצ'רד טיילור, וההוכחה פורסמה בגיליון חודש מאי 1995 של כתב העת Annals of Mathematics. מהוכחה זו נובעת נכונותו של המשפט האחרון של פרמה.

ההוכחה של ויילס טכנית ומסובכת מאוד, משתרעת על פני 200 עמודים לערך, עושה שימוש בטכניקות מתמטיות שפותחו רק במאה ה- 20 ובלתי ניתנת להבנה גם על ידי רוב המתמטיקאים. לא ייתכן שפרמה התייחס להוכחה זו בדברו על הוכחה "פשוטה להפליא", והדעה המקובלת היא שהוכחה כזו אינה קיימת. למרות זאת, גם בימינו ישנם כאלו שמחפשים אחר ההוכחה ה"פשוטה" למשפט האחרון של פרמה.

פרסים שהוצעו עבור הוכחת המשפט

ב- 1816 ושוב וב- 1850 הציע האקדמיה הצרפתית למדעים פרס כספי למוכיח המשפט. ב- 1857 העניקה האקדמיה 3,000 פרנק ומדליית זהב לארנסט קומר על עבודתו, אף שלא הגיש את עבודתו לפרס.

בצוואתו משנת 1908 של התעשיין היהודי-גרמני פאול וולפסקהל, שהיה מתמטיקאי חובב, הוקצו 100,000 מרקים כדי לממן פרס למי שיצליח להוכיח את המשפט. הזכייה בפרס הפכה ליעדם של מתמטיקאים חובבים רבים, שטענו שמצאו הוכחה למשפט. בכל המקרים נמצאה הוכחתם שגויה. באוניברסיטת גטינגן, לשם נשלחו ההוכחות, הכין ראש המחלקה למתמטיקה אדמונד לנדאו מכתב סטנדרטי עם מספרי העמוד והשורה בהם נמצאה הטעות הראשונה. הפרס היה אמור להינתן להוכחה שתתפרסם בכתב עת מתמטי, ולאחר זמן המתנה של שנתיים. הפרס אמור היה לפקוע ב-2007, כמאה שנה לאחר הכרזתו. ב- 1997 הוענק הפרס לאנדרו ויילס. שוויו היה באותה העת כ-$50,000.

הכללות

את השאלה האם קיימים פתרונות למשוואה $x^n + y^n = z^n$ אפשר לשאול לא רק במספרים השלמים, אלא גם במערכות מתמטיות אחרות.

למשל, בחוג המספרים $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$ מתקיים השוויון: $(1+\sqrt{-7})^4 + (1-\sqrt{-7})^4 = 2^4$, כך שהמשפט אינו נכון שם (עבור n=4); בין חוגי השלמים של ההרחבות הריבועיות של הרציונאליים, $\mathbb{Q}[\sqrt{-7}]$ הוא היחיד שבו יש פתרון עבור n=4. בין ההרחבות האלה, במקרים רבים יש פתרון עבור n=3, בעוד שעבור n=6 או n=9 אין אף לא הרחבה אחת שבה יש למשוואה פתרון. ידוע גם שאין למשוואה פתרונות בחוגי פולינומים מעל שדה (אם המאפיין של השדה אינו מחלק את n).

אוילר שיער שלא ניתן לפתור את המשוואה $x_1^n + \ldots + x_{n-1}^n = z^n$ במספרים שלמים, כאשר $2 < n$.

השערה זו אינה נכונה, כפי שמראה השוויון: $27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5$.