

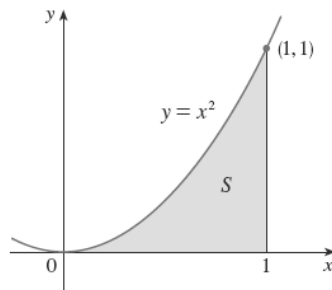
האינטגרל וחישובי שטחים-

תמונה היסטורית

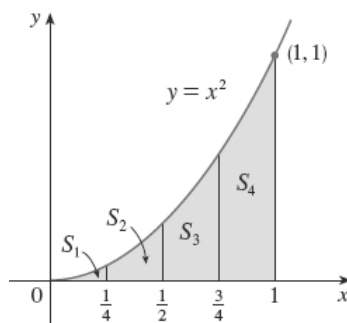
לפני הרבה זמן, בימי קדם, מתמטיקאים רבים עסקו בשאלה "איך לחשב שטח?" אנחנו יודעים ששטח מלבן הוא מכפלת רוחבו באורכו, ושטח משולש הוא מכפלה של גובהו באורך בסיסו חלקי שתיים. שטח של כל מצולע שהוא ניתן למצוא על ידי חלוקתו למשולשים ומציאת שטח כל המשולשים.

אבל איך מחשבים של שטח של עקום? זה בהחלט לא פשוט כמו לחשב שטח של מצולע שמורכב מקווים ישרים. לשם כך פותח והוגדר האינטגרל. האינטגרל הוא יותר מכלי למציאת שטחים, הוא הכללה מרחיקת לכת למושג הסכימה בעל אינספור שימושים בתחומים רבים ושונים. אחד מהם ניתן למצוא בסוף מאמר זה.

נסתכל על גרף הפונקציה $y = f(x) = x^2$.



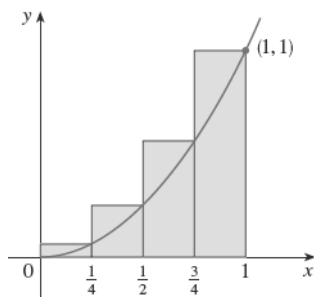
ברצוננו למצוא את השטח S שתחום על ידי ציר האיקס, גרף הפונקציה, ציר ה-Y והישר $x=1$. אנחנו כבר יכולים לומר כי $S < 1$ כי S מוכל בריבוע שאורכו ורוחבו 1. אבל אפשר למצוא קירוב טוב יותר לשטח. נחלק את S ל-4 רצועות S_1, S_2, S_3, S_4 על ידי שרשטות הקווים $x = \frac{1}{4}, x = \frac{1}{2}, x = \frac{3}{4}$. סכום הרצועות הוא השטח S .



אנחנו יכולים למצוא קירוב לשטחה של כל רצועה באופן הבא: המלבן שרוחבו הוא $1/4$ (רוחב כל הרצועות הוא $1/4$) וגובהו הוא ערך הפונקציה בנקודות

$f\left(\frac{1}{4}\right), f\left(\frac{1}{2}\right), f\left(\frac{3}{4}\right), f(1)$ מהווה קירוב לשטח כל רצועה. מהשרשטות הבא, אנחנו

רואים שהקירוב הזה הוא יותר מהשטח S שאנחנו מחפשים:



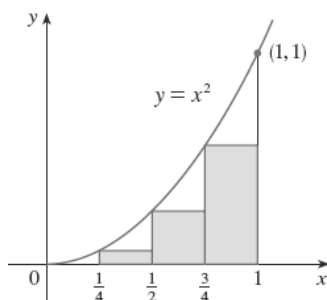
אבל אנחנו יכולים לחשב שטח של מלבן! נחשב סכום של שטחי ארבעת המלבנים האלו ונקרא לסכום R_4 .

$$R_4 = \frac{1}{4} \cdot f\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} \cdot f\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{4} \cdot f(1) = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + (1)^2 \right] = 0.46875$$

מכיוון ש- $R_4 > S$, מתקיים $S < 0.46875$. ללא ספק קירוב יפה יותר מהקירוב הראשוני שלנו 1.

נשים לב שאנחנו יכולים לחלק למלבנים גם באופן קצת אחר. עדיין ניקח 4 מלבנים שרוחבם הוא $1/4$ אבל ניקח את גובהו של המלבן הראשון להיות $f(0)$, את גובהו של המלבן השני להיות $f\left(\frac{1}{4}\right)$, את גובהו של המלבן השלישי להיות $f\left(\frac{1}{2}\right)$ ואת גובהו של המלבן הרביעי להיות $f\left(\frac{3}{4}\right)$.

כעת גובהו של כל מלבן הוא ערך הפונקציה בנקודה השמאלית של המלבן, לא הנקודה הימנית. המצב שנוצר הוא שקיבלנו ששטח סכום המלבנים החדשים הוא הפעם קטן מהשטח שאנחנו מחפשים. להמחשה:



שימו לב כי שטח הרצועה הראשונה הוא כעת אפס כי ערך הפונקציה עבור $x=0$ הוא אפס. נחשב את סכום שטח המלבנים הללו תחת השם L_4 ונקבל:

$$L_4 = \frac{1}{4} \cdot f(0) + \frac{1}{4} \cdot f\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} \cdot f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4} \left[0^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \right] = 0.21875$$

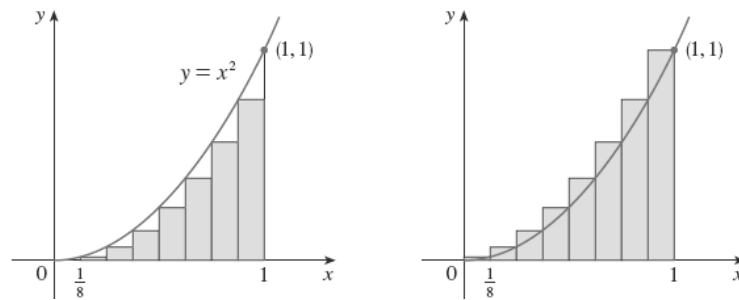
כעת יש לנו תחום מסוים שאנחנו יודעים ששטח הפונקציה נמצא שם.

$$L_4 < S < R_4$$

$$0.21875 < S < 0.46875$$

L אומר שהשתמשנו בנקודות השמאליות כגובה עבור המלבנים ו-R אומר שהשתמשנו בנקודות הימניות.

אנחנו יכולים לקבל קירובים טובים יותר אם נחלק ליותר מלבנים. למשל, בחלוקה ל-8 מלבנים מקבלים:



השרטוט מימין מציג חלוקה ל-8 מלבנים תוך שימוש בנקודות הקצה הימניות של כל מלבן והשרטוט משמאל מציג חלוקה תוך שימוש בנקודות הקצה השמאליות של כל מלבן. חישוב שכזה ייתן לנו:

$$0.2734375 < S < 0.3984375$$

כך, ככל שנחלק ליותר מלבנים, נקבל קירוב טוב יותר. למשל, עבור $n=100$ מלבנים, נקבל כבר:

$$0.32835 < S < 0.33835$$

נוצר הרושם ש- R_n (חלוקה באמצעות נקודות קצה ימניות) ו- L_n (חלוקה באמצעות נקודות קצה שמאליות) שואפים שניהם למספר כלשהו שהמספר הזה הוא S ונוצר הרושם שהם שואפים לשליש. אבל הרושם אינו אומר הרבה. איך נוכיח את זה? אנחנו רוצים להוכיח כי:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \frac{1}{3}$$

נשים לב כי רוחב כל מלבן יהיה $\frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$. עבור 4 מלבנים, רוחב כל מלבן הוא רבע.

עבור 8 מלבנים, רוחב כל מלבן הוא שמינית וכו'. כיוון שאנחנו משתמשים בנקודות קצה ימניות, ערכי הפונקציה שנסתכל עליהם הם

$$f\left(\frac{1}{n}\right), f\left(\frac{2}{n}\right), f\left(\frac{3}{n}\right), \dots, f\left(\frac{n}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^2, \left(\frac{2}{n}\right)^2, \left(\frac{3}{n}\right)^2, \dots, \left(\frac{n}{n}\right)^2$$

על ערך הפונקציה בנקודת הקצה הימנית של כל מלבן. אם כך, נקבל:

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{2}{n}\right) + \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{3}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{n}{n}\right) = \\ &= \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{3}{n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n}{n}\right)^2 = \\ &= \frac{1}{n} \cdot \left[\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \left(\frac{3}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{n}{n}\right)^2 \right] \end{aligned}$$

נשים לב כי אנחנו יכולים להוציא $\frac{1}{n^2}$ מכל איבר בסוגריים המרובעות החוצה. ואז

נקבל:

$$R_n = \frac{1}{n^3} [1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2]$$

יש לנו נוסחה עבור סכום חזקות שניות:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

לכן:

$$R_n = \frac{1}{n^3} [1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2] = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2}$$

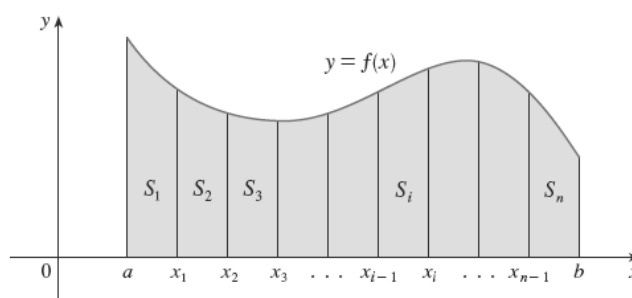
לפיכך:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{6} = \frac{2 + 0 + 0}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

ובכך הוכחנו את מה שרצינו. כאשר מס' המלבנים שלנו שואף לאינסוף, הקירוב שלנו שואף לשטח האמיתי, שהוא במקרה הזה שליש. ניתן להראות באופן דומה שגם L_n שואף לשליש. לכן:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \frac{1}{3}$$

כעת ננסה הגדרה כללית בהתבסס על כך לשטח של פונקציה:



אנחנו מחלקים את השטח המבוקש S ל- n רצועות בעלות רוחב שווה ומסמנים אותן כ- $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$. הרוחב של כל הקטע בו אנו רוצים לחשב שטח הוא $b-a$. לכן, רוחב

כל רצועה יהיה $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, פשוט רוחב כל הקטע חלקי מס' החלוקות. הרצועות

מחלקות את הקטע $[a, b]$ לתת-קטעים $[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{n-1}, x_n]$, כאשר

$a = x_0$ וכן $b = x_n$. נקודות הקצה הימניות של התת-קטעים הן $x_1 = a + \Delta x, x_2 = a + 2\Delta x, x_3 = a + 3\Delta x, \dots$. כלומר, $x_i = a + i\Delta x$.

לכן, R_n (קירוב מלבני באמצעות שימוש בנקודות קצה ימניות) יהיה:

$$R_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \dots + f(x_n)\Delta x$$

לכן, השטח S יהיה:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \dots + f(x_n)\Delta x] = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta x [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)]$$

באופן דומה, עבור נקודות קצה שמאליות:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \dots + f(x_{n-1})\Delta x] = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta x [f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})]$$

למעשה, אנחנו יכולים להשתמש בכל נקודות שנמצאות בתוך תת-קטע ולאוו דווקא בנקודות הקצה. כמו-כן, רוחב תת-הקטעים אינו חייב להיות זהה. לא ניכנס כאן לאפשרויות אלו.

הגדרת האינטגרל המסוים:

אם f היא פונקציה רציפה המוגדרת עבור $a \leq x \leq b$, אנחנו מחלקים את הקטע $[a, b]$ ל- n תת-קטעים שרוחבם זהה והוא $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, כאשר $x_0 (= a), x_1, x_2, \dots, x_n (= b)$ הן נקודות הקצה של תת-קטעים אלו. הגדרת האינטגרל המסוים של f מ- a ל- b היא:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$$

כאשר x_i^* היא תמיד נקודה הנמצאת בתת-קטע $[x_{i-1}, x_i]$. לרוב נבחר את x_i^* להיות x_i (כלומר, נשתמש בנקודות קצה ימניות) או x_{i-1} (כלומר, נשתמש בנקודות קצה שמאליות).

שימו לב כי f צריכה להיות רציפה, משמע מוגדרת בכל התחום $[a, b]$ ללא אי-רציפויות למיניהן (כלומר, בקטע $[a, b]$ ניתן לצייר את הפונקציה מבלי להוריד את העיפרון מהדף אף פעם אחת).

אם הפונקציה היא כולה חיובית בקטע $[a, b]$ האינטגרל נותן לנו את השטח שמתחתיה. אם היא חיובית-שלילית, הוא נותן לנו את ההפרש בין השטח שמעל ציר האיכס ומתחתיה לבין השטח שמתחת לציר האיכס ומעליה.

להלן דוגמא לחישוב אינטגרל לפי ההגדרה:

$$\begin{aligned} \int_0^3 (x^3 - 6x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{3i}{n}\right) \frac{3}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{3i}{n}\right)^3 - 6\left(\frac{3i}{n}\right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} \sum_{i=1}^n \left[\frac{27}{n^3} i^3 - \frac{18}{n} i \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{81}{n^4} \sum_{i=1}^n i^3 - \frac{54}{n^2} \sum_{i=1}^n i \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{81}{n^4} \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 - \frac{54}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{81}{4} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 - 27 \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right] \\ &= \frac{81}{4} - 27 = -\frac{27}{4} = -6.75 \end{aligned}$$

בדוגמה זו, השתמשו בנקודות קצה ימניות. Δx היה $\frac{3-0}{n} = \frac{3}{n}$, וכן

$$x_i = a + i\Delta x = 0 + i \cdot \frac{3}{n} = \frac{3i}{n}. \quad \text{כאשר } f \text{ היא הפונקציה } x^3 - 6x.$$

בחישוב, נעשה שימוש בנוסחאות:

$$\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^n i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

אנו רואים כי מדובר בחישוב מייגע, מה שמביא אותנו למשפט היסודי של החזו"א אשר נותן לנו כלי קל יותר לחישוב אינטגרלים מאשר חישוב באמצעות ההגדרה.

המשפט היסודי של החזו"א:

אם f היא פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$, אזי

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

כאשר F היא כל פונקציה קדומה שהיא של f , כלומר, פונקציה כך שמתקיים $F'(x) = f(x)$.

למשפט היסודי יש חלק נוסף, אשר לא נציג אותו כאן כדי לא לסבך את העניינים. הנ"ל צריך להיות מוכר כ"נוסחה" לחישוב אינטגרלים מהתיכון. הנוסחה הזו היא "חזקה" מאוד. היא אומרת שאם אנחנו יודעים מה הפונקציה הקדומה של f אז אנחנו יכולים בקלות לחשב אינטגרלים מסוימים של f . למשל, נחשב באמצעות זאת את האינטגרל שהדגמנו קודם את חישובו באמצעות ההגדרה.

$$\int_0^3 (x^3 - 6x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{6x^2}{2} \right]_0^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{6 \cdot 3^2}{2} = -6.75$$

קל לראות כי החישוב הזה הוא פשוט בהרבה מהחישוב באמצעות ההגדרה. לפיכך, המשפט היסודי של החזו"א נותן לנו דרך קונקרטית ופשוטה לחישוב אינטגרלים. עם זאת, לשכוח את הגדרת האינטגרל זהו חטא נוראי מכיוון שכפי שאמרנו קודם, האינטגרל הוא הכללה מרחיקת לכת למושג הסכימה. איפה ההכללה מרחיקת הלכת הזו אם נחשוב על האינטגרל רק ככלי לחישוב שטחים באמצעות פונקציות קדומות? למעשה, למרות שהגדרנו את האינטגרל ככלי לחישוב שטח מתחת לפונקציה, אנחנו נראה כעת כי ההגדרה הזו היא יותר כללית ממה שנדמה.

ערך ממוצע של פונקציה

באופן כללי, לדעת מהו הערך הממוצע של פונקציה כלשהי זה דבר מאוד יעיל. למשל, פונקציה שמתארת את הטמפרטורה במקום כלשהו בזמן כלשהו. זה שימושי למדי לדעת מהי הטמפרטורה הממוצעת שהייתה בזמן הזה. אבל איך מחשבים ערך ממוצע של פונקציה? אם הפונקציה היא פשוט קו ישר, אז הערך הממוצע שלה בקטע $[a,b]$ הוא פשוט $\frac{f(a)+f(b)}{2}$. אבל אי אפשר לנהוג בכזו תמימות כלפי כל

סוג של פונקציה. פונקציה יכולה להיות עקומה (פרבולה, למשל). היא גם יכולה לקבל את אותו הערך פעמים רבות. באופן כללי, נמצא קירוב לערך הממוצע של הפונקציה $f(x)$ בקטע $[a,b]$ אם נחשב את ערך הפונקציה ב- n מקומות, נחבר את כל הערכים

האלו ונחלק ב-n. למשל, אם נרצה קירוב לערך הממוצע של הפונקציה $f(x) = 1 + x^2$ בתחום $[-1, 2]$, אנחנו יכולים לחשב:

$$T = \frac{f(-1) + f(0) + f(1) + f(2)}{4} = \frac{1 + (-1)^2 + 1 + 0^2 + 1 + 1^2 + 1 + 2^2}{4} = 2.5$$

כאשר T הוא קירוב לערך הממוצע.

כעת, באופן כללי, נרצה לחשב את הערך הממוצע של פונקציה f בקטע $[a, b]$. נחלק

את הקטע $[a, b]$ ל-n תת-קטעים שאורך כל תת-קטע הוא $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. אז נבחר

נקודות $x_1^*, x_2^*, x_3^*, \dots, x_n^*$ כאשר x_i^* היא תמיד נקודה הנמצאת בתת-קטע $[x_{i-1}, x_i]$.

נחשב את ערך הפונקציה לכל x_i^* ומכיוון שחילקנו ל-n קטעים ובהתאם חישבנו n

ערכים, הממוצע של כל הערכים האלו (וקירוב לערך הממוצע של הפונקציה) יהיה:

$$\frac{f(x_1^*) + f(x_2^*) + f(x_3^*) + \dots + f(x_n^*)}{n}$$

ניתן לראות את הדמיון לחישוב שטח. בחישוב שטח, חילקנו ל-n מלבנים וסכמנו את שטחי כל המלבנים וכך קיבלנו קירוב לשטח מתחת לגרף הפונקציה. כאשר השאפנו את n לאינסוף, קיבלנו את שטח הפונקציה האמיתי. המקרה כאן הוא דומה. אנחנו לוקחים n ערכים של הפונקציה, במרחקים קבועים זה מזה, ומחלקים אותם ב-n (ממוצע חשבוני). קל לראות שאם נשאיף את n לאינסוף, נקבל גם במקרה הזה את ערך הפונקציה הממוצע האמיתי ולא סתם קירוב. אבל כבר יצרנו מודל מסוים שמאפשר לנו לחשב שטחים בקלות תוך שימוש בהגדרת האינטגרל ובמשפט היסודי של החדו "א". נרצה להחיל את המודל הזה גם עבור המקרה כאן אבל קודם נצטרך להביא אותו לצורה הדרושה.

$$\begin{aligned} \frac{f(x_1^*) + f(x_2^*) + f(x_3^*) + \dots + f(x_n^*)}{n} &= \frac{f(x_1^*) + f(x_2^*) + f(x_3^*) + \dots + f(x_n^*)}{\frac{b-a}{\Delta x}} = \\ &= \frac{1}{b-a} \left[f(x_1^*) + f(x_2^*) + f(x_3^*) + \dots + f(x_n^*) \right] \Delta x = \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x \end{aligned}$$

כעת, כדי לקבל את הערך הממוצע של הפונקציה ולא סתם קירוב, נשאיף את זה לאינסוף ונקבל:

$$f_{ave} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x = \frac{1}{b-a} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$$

$\frac{1}{b-a}$ הוא גורם קבוע, לכן ניתן היה להוציא אותו מחוץ לגבול. אין זה מקרה שמה

שקיבלנו כאן הוא הגדרת האינטגרל:

$$f_{ave} = \frac{1}{b-a} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

כעת, אנחנו יכולים לחשב בקלות ערכים ממוצעים של פונקציה. לצורך העניין, נחשב את הערך הממוצע של הפונקציה בה דנו קודם לכן, $f(x) = 1 + x^2$ בתחום $[-1, 2]$.

$$f_{ave} = \frac{1}{2 - (-1)} \int_{-1}^2 (1 + x^2) dx = \frac{1}{3} \left[x + \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2 = \frac{1}{3} \left[\left(2 + \frac{2^3}{3} \right) - \left((-1) + \frac{(-1)^3}{3} \right) \right] = 2$$

זהו הערך הממוצע המדויק של הפונקציה הזו עבור התחום הזה.

כפי שניתן לראות, האינטגרל הוא יותר מכלי לחישוב שטחים. הוא הכללה של מושג הסכימה כך שניתן להתאימו למטרות רבות מאין ספור. כאן ראינו איך הוא יכול לשמש לחישוב שטחים ולמציאת ערך ממוצע של פונקציה. ידוע גם כי ניתן להשתמש בו כדי לחשב נפח של גופי סיבוב. בנוסף לכך, ניתן להשתמש בו כדי לחשב אורך מדויק של כל עקום שהוא, שטח פנים של גופי סיבוב, מרכזי כובד של גופים, חישובים סטטיסטיים מסוימים ועוד שימושים רבים מאינספור. בכל המקרים הללו, הרעיון מתבסס על חלוקה למס' גדול ככל שנרצה של קטעים קטנים ככל שנרצה והשאפה לאינסוף של מס' קטעים זה, כמו-כן התאמה של הסכימה המתוארת לביטוי בהגדרת האינטגרל. זוהי הגדולה של מושג האינטגרל.