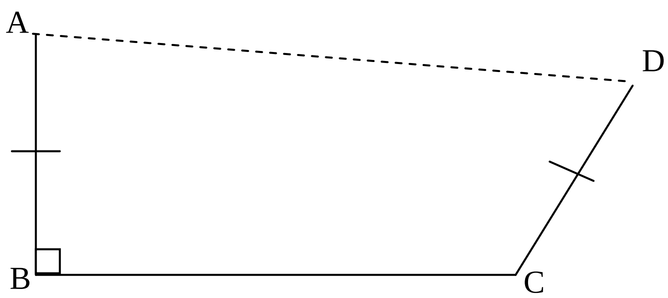
פרדוקס מעניין לכאורה
"הוכחה" שזווית קהה שווה לזווית ישרה

מתחילים מהסרטוט הבא:

נתון:
CD=AB
זווית ABC היא זווית ישרה
זווית BCD היא זווית קהה.

אם נעביר את הקו AD – ברור שהוא לא מקביל ל-BC



עכשיו נוריד אנך אמצעי ל- AD, ואנך אמצעי ל-BC, שני האנכים האמצעיים לא מקבילים, ולכן יש להם נקודת מפגש. נסתכל על נקודת המפגש של שני האנכים האמצעיים הללו.

אפשר לראות בקלות שנקודת המפגש לא יכולה להיות מעל הישר AD.

נותרו המקרים הבאים:

1. בתוך המרובע ABCD
2. על הישר BC
3. מתחת לישר BC

עכשיו, לשם הנוחות נסמן את נקודת מפגש האנכים באות M

את הנקודה שממנה יוצא האנך האמצעי ל- AD נסמן באות E, ואת הנקודה שממנה יוצא האנך האמצעי ל- BC נסמן באות F.

נבדוק כל אחד מהמקרים:

1. נניח כי M נמצאת בתוך המרובע ABCD.

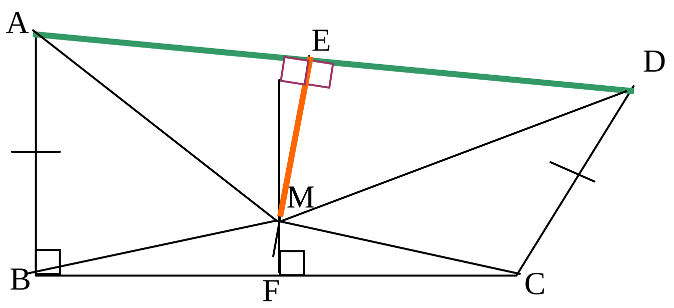
מתקיים AE = ED

∠AEM = ∠MED

(כי EM הוא אנך אמצעי ל- AD)

ו- EM הוא צלע משותפת למשולש AEM ולמשולש EMD

מכאן על פי משפט חפיפה צלע-זווית-צלע, שני המשולשים חופפים.



מסקנה: AM = MD

בנוסף:

BF = FM

∠MFB = ∠MFC

והצלע MF היא צלע משותפת.

מכאן על פי משפט חפיפה צלע-זווית צלע: CFM ≅ BFM

ולכן הזוויות MBF ו- MCF שוות (מסומנות בשרטוט ב- α)

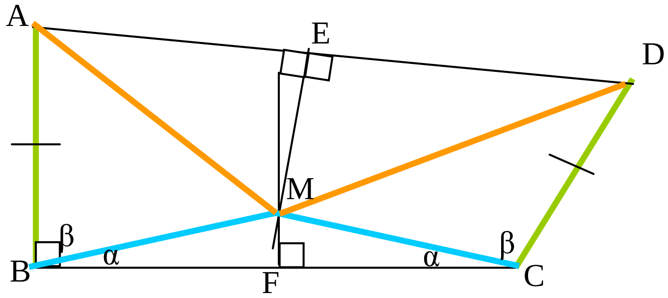
לבסוף נסתכל במשולשים AMB ו- DMC

AB = CD (נתון)

AM = DM (הוכחנו בחפיפת המשולשים)

BM = MC

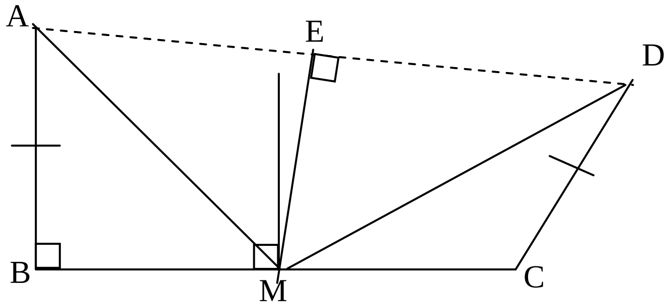
ולכן לפי משפט חפיפה צלע-צלע-צלע: $ABM \cong DCM$



ומכאן $\angle ABM = \angle DCM$
(בשרטוט היא מסומנת β)

יש לנו שתי זוויות שהן $\alpha + \beta$ ולכן שוות, אבל אחת מהן ישרה, והשנייה קהה.
נעבור לאפשרות השנייה:

2. נניח כי M נמצאת על BC. כמקודם E היא הנקודה שממנה יוצא האנך האמצעי ל AD



כאן מתקיים

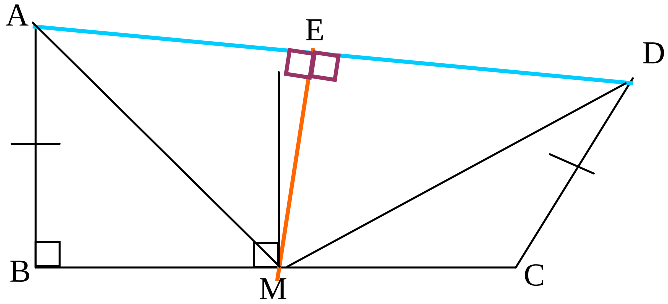
מתקיים $AE = ED$

$\angle AEM = \angle MED$

(כי EM הוא אנך אמצעי ל- AD)

ו- EM הוא צלע משותפת למשולש AEM ולמשולש EMD

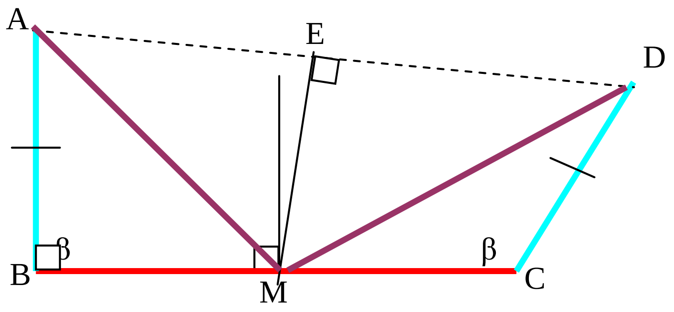
מכאן על פי משפט חפיפה צלע-זווית-צלע, שני המשולשים חופפים.



מסקנה: AM = MD

בנוסף נתון AB = DC
ו- BM = MC

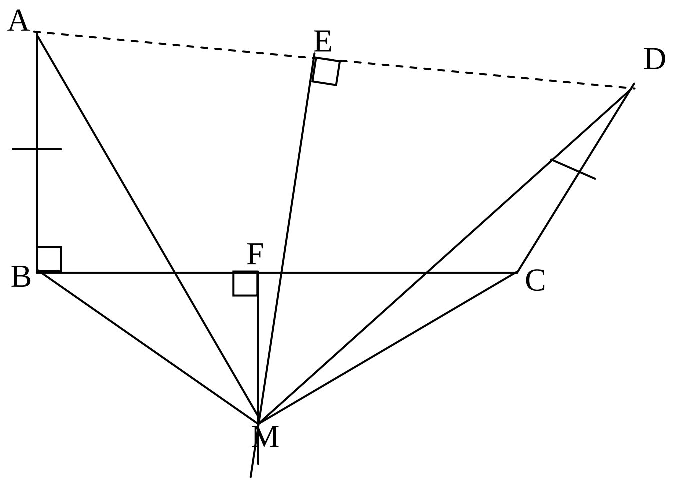
ולכן לפי משפט חפיפה צלע-צלע-צלע: $ABM \cong DCM$



ומכאן $\angle ABM = \angle DCM$ (בשרטוט היא מסומנת β) ושוב קיבלנו שזווית ישרה שווה לזווית קהה.

ואם כך, נעבור לאפשרות השלישית:

3. הנקודה M נמצאת מתחת לישר BC



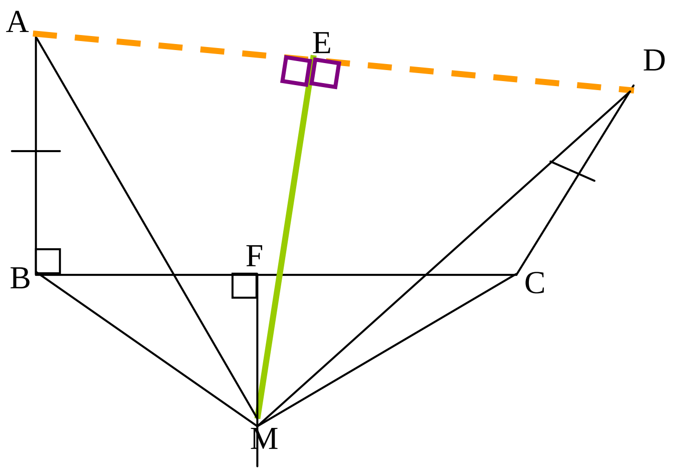
מתקיים AE = ED

$\angle AEM = \angle MED$

(כי EM הוא אנך אמצעי ל- AD)

ו- EM הוא צלע משותפת למשולש AEM ולמשולש EMD

מכאן על פי משפט חפיפה צלע-זווית-צלע, שני המשולשים חופפים.



מסקנה: AM = MD

בנוסף

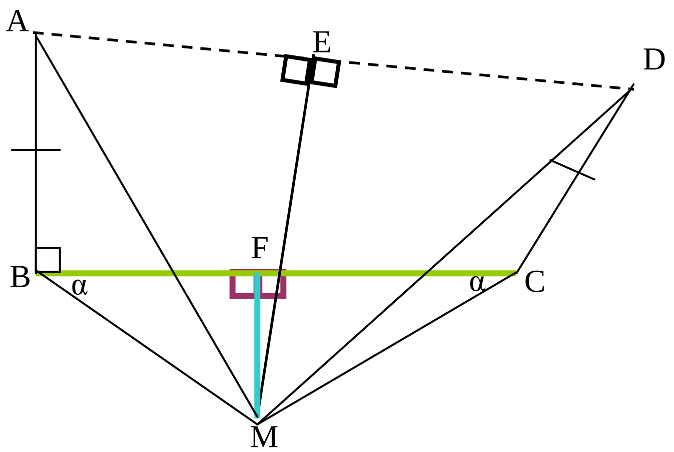
BF = FM

$\angle MFB = \angle MFC$

(שניהם נכונים כי FM אנך אמצעי ל-BC)

והצלע MF היא צלע משותפת.

מכאן על פי משפט חפיפה צלע-זווית צלע: CFM ≅ BFM



ומסקנה: BM = CM

וגם $\angle FBM = \angle FCM$ (מסומנות בציור באות α)

לבסוף נסתכל במשולשים AMB ו- DMC

AB = CD (נתון)

AM = DM (הוכחנו בחפיפת המשולשים)

BM = MC

ולכן לפי משפט חפיפה צלע-צלע-צלע: $ABM \cong DCM$

ובפרט: $\angle ABM = \angle DCM$

מתקיים $\angle ABM - \alpha = \angle DCM - \alpha$

(חיסור זוויות שוות)

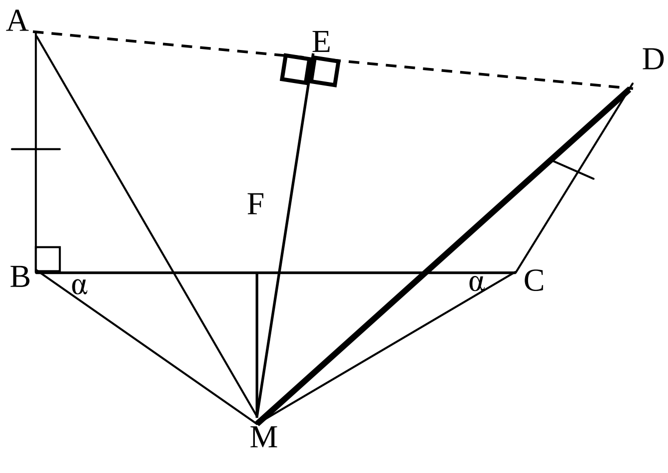
ושוב זווית ישרה שווה לזווית קהה.

כך ראינו שעל פי כל המקומות האפשריים לנקודה M שהיא נקודת המפגש של האנכים האמצעיים, חפיפת משולשים בסיסית מראה שזווית ישרה שווה לזווית קהה.

זה נראה ארוך מדי, אבל על הלוח עם הסבר איטי ומדויק לגבי המקרה הראשון, אנשים יקלטו את הרעיון ויתפסו אותו לגבי הרעיון השני והשליש "לגבי נקודת המפגש".
הפתרון הבא שאפשר להשיגו בתוכנת ג'יאוג'ברא:

אז איפה כאן המלכודת?

המלכודת נמצאת במקרה השלישי, שבו הנחנו במובלע שהישר שמחבר את D עם M חותך את BC וכך נוצרים משולשים לחפיפה.



בעוד בפועל אם נשרטט במדויק בעזרת סרגל ואנך נראה כי נקודת החיתוך M נמצאת "הרחק למטה" מתחת ל-BC ולכן DM לא חותך את BC, וחפיפת המשולשים כלל לא מתקיימת