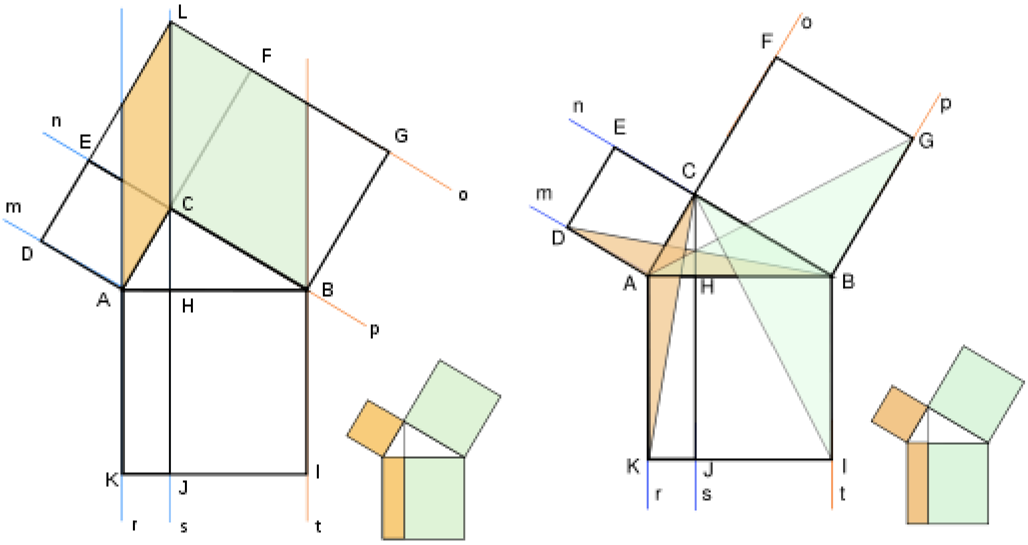
הוכחות מפורסמות למשפט פיתגורס

למשפט פיתגורס התפרסמו הוכחות רבות. למעשה, ייתכן שמשפט פיתגורס הוא המשפט המתמטי בעל המספר הרב ביותר של הוכחות (367 הוכחות). עם האנשים שמצאו הוכחות חדשות למשפט נמנים לאונרדו דה וינצ'י והנשיא ה-20 של ארצות הברית, ג'יימס גרפילד.

אוקלידס



בספרו הנודע של אוקלידס, "יסודות", כרך ראשון, משפט מספר 47, מצויה ההוכחה הבאה למשפט:

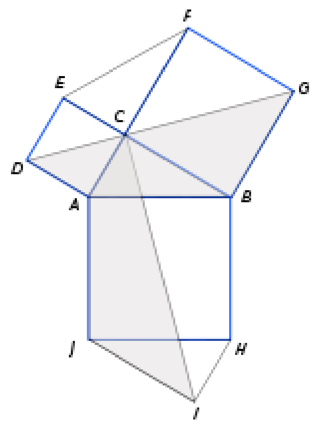
יהי ABC משולש ישר זווית, כאשר C היא הזווית הישרה. מנקודה C מעבירים גובה ליתר, כך שיחצה את הריבוע המונח עליו לשני מלבנים. ההוכחה מראה ששטחי המלבנים האלו שווים לשטחים של הריבועים המונחים על הניצבים בהתאמה. כפי שניתן לראות בציור משמאל, ההוכחה מבוססת על המרת כל אחד משני הריבועים המונחים על הניצבים למקבילית בעלת אותו שטח, השווה גם לשטחו של המלבן המתאים.

להלן פרטי ההוכחה:

1. ABC הוא משולש ישר זווית, עם זווית ישרה ACB.
2. על כל אחת מצלעות המשולש AB, BC, CA מונחים הריבועים ABIK, BCFG, CADE בהתאמה.
3. הגובה מקודקוד C ליתר AB חותך את הצלעות AB, KI בנקודות H, J בהתאמה.

4. הזוויות ACB ו-ACE הן <u>זוויות ישרות</u> ולכן הנקודות B, C ,E נמצאות על ישר אחד. כנ"ל לגבי הנקודות A, C, F.
5. הזוויות DAC ו-BAK הן זוויות ישרות, לכן המשולשים KAC ו-BAD <u>חופפים</u> (AD=AC, הזוויות KAC ו-BAD שוות, BA=KA)
6. מאחר שהנקודות C, H, J נמצאות על ישר אחד, אזי שטח המלבן KAHJ שווה לפעמיים שטח המשולש KAC.
7. מאחר שהנקודות B, C, E נמצאות על ישר אחד, אזי שטח הריבוע ADEC שווה לפעמיים שטח המשולש ADB.
8. מכאן ששטח המלבן KAHJ שווה לשטח הריבוע ADEC, כלומר שטח המלבן KAHJ שווה ל-AC^2
9. משימוש באותם השיקולים מתקבל ששטח המלבן IBHJ שווה ל-BC^2
10. מחיבור שתי תוצאות אלו נובע ששטח הריבוע IBAK שווה ל-BC^2+AC^2
11. מחישוב ישיר של שטח הריבוע IBAK, שטחו שווה ל-AB^2
12. סך הכל, מקבלים כי: $AB^2 = BC^2 + AC^2$

<u>לאונרדו דה וינצ'י</u>



הוכחתו של דה וינצ'י למשפט פיתגורס

הסבר להוכחתו של <u>לאונרדו דה וינצ'י</u>, המתוארת בסקיצה לעיל:

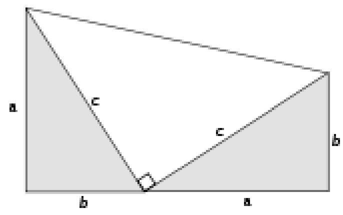
<u>המרובעים</u> האפורים AJIC ו-ABGD חופפים ולכן שטחם שווה. כך גם לגבי המרובעים הלבנים DGFE ו-CIHB. מתקבל כי שטח <u>המשושים</u> AJIHBC ו-ABGFED שווה.

שטח המשושה AJIHBC שווה ל- $c^2 + 2 \cdot \frac{ab}{2} = c^2 + ab$

שטח המשושה ABGFED שווה ל- $a^2+b^2+2\cdot\frac{ab}{2}=a^2+b^2+ab$

מהשוואת שני הביטויים שהתקבלו, המייצגים את אותו השטח, מתקבל משפט פיתגורס.

הנשיא גרפילד



הוכחת הנשיא גרפילד למשפט פיתגורס

את שטח הטרפז בציור למעלה ניתן לחשב בשני אופנים:

מצד אחד, הוא שווה ל- $\frac{(a+b)^2}{2}$, כיוון ששטח טרפז שווה למכפלת הגובה במחצית מסכום הבסיסים.

מצד שני הוא שווה ל- $\frac{1}{2}c^2+ab$ כי הוא שווה לסכום שטחם של שני המשולשים האפורים עם המשולש שביניהם (הלבן).

מהשוואת שני הביטויים שהתקבלו, המייצגים את אותו השטח, מתקבל משפט פיתגורס.

שיטות הוכחה נוספות

כאמור, למשפט פיתגורס התפרסמו עשרות רבות של הוכחות המבוססות על שיטות שונות. רובן הגדול של ההוכחות מבוסס על גאומטריה: חישוב של אותו שטח בשתי דרכים שונות, בחלקן תוך סידור מחדש של השטח; שימוש במשולשים דומים ובמשולשים חופפים; שימוש בקווים מיוחדים במעגל: רדיוס ומשיק.

הוכחות פחות שגרתיות מתבססות על כלים מתמטיים מתקדמים יותר, כמו חשבון דיפרנציאלי ואנליזה ממדית.

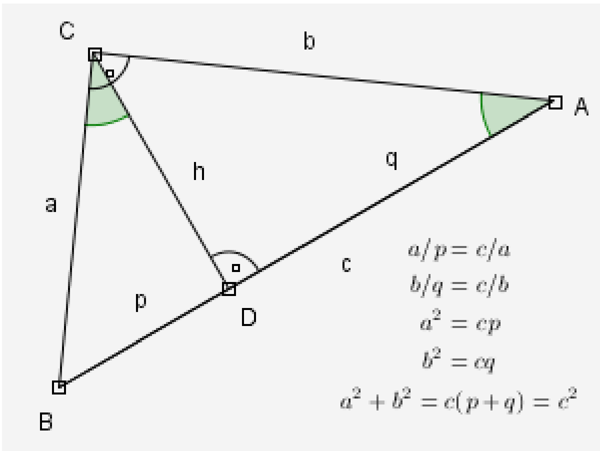
אפשר לקבל את המשפט גם כמקרה פרטי של זהויות טריגונומטריות שונות, אם כי זו אינה הוכחה, משום שאת הזהויות עצמן מוכיחים באמצעות משפט פיתגורס.

השוואת שטחים

דרך אחת להוכחת המשפט היא חישוב שטח של צורה נתונה בשתי דרכים שונות, שההשוואה ביניהן נותנת את משפט פיתגורס. דוגמה להוכחה בדרך זו, היא הוכחתו של הנשיא גרפילד שהוצגה לעיל.

וריאציה אחרת של שיטה זו, היא חישוב שטח של צורה מסוימת, סידור מחדש של השטח על ידי חיתוך והרכבה, חישוב מחדש של השטח, וכמו קודם, מהשוואת השטחים מתקבל משפט פיתגורס. דוגמה להוכחה בשיטה זו, היא הוכחתו של לאונרדו דה וינצ'י.

חפיפה ודמיון משולשים



הוכחה באמצעות דמיון משולשים

אחת הדרכים הנפוצות להוכחת המשפט היא שימוש בחפיפת משולשים, כמו בהוכחתו של אוקלידס, או שימוש בדמיון משולשים, כמו בדוגמה הבאה:

נתון משולש ישר זווית *ABC*, כאשר $\angle ACB$ הינה הזווית הישרה.

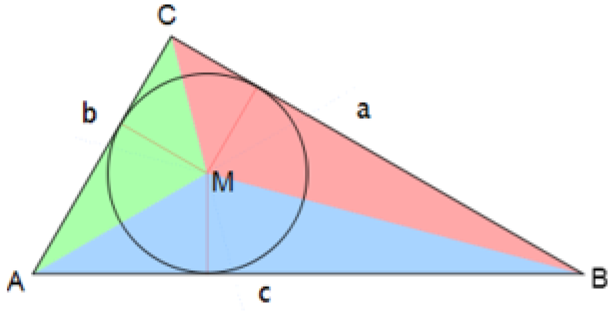
מהקודקוד *C* מורידים גובה לצלע *AB* ומקבלים שלושה משולשים דומים: *ACB*, *ADC*, *CDB*.

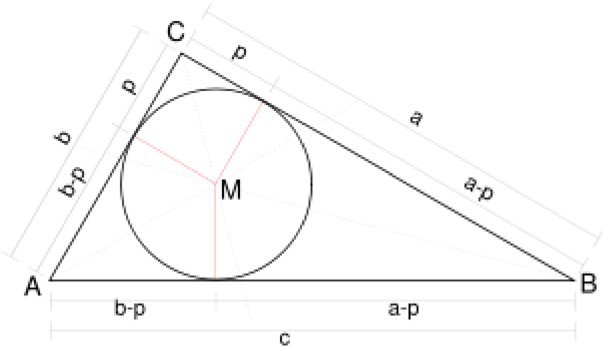
את המשך ההוכחה ניתן לראות בציור משמאל.

פרשנים טוענים שההוכחה הייתה ידועה לאוקלידס כאשר כתב את "יסודות", אך כיוון שרצה לכלול את משפט פיתגורס כבר בכרך הראשון של ספריו, לפני המשפטים שעוסקים בדמיון משולשים, הוא השתמש בהוכחה מורכבת יותר.

קווים מיוחדים במעגל

שימוש בתכונותיהם של הרדיוס והמשיק למעגל, כמו בדוגמה הבאה:



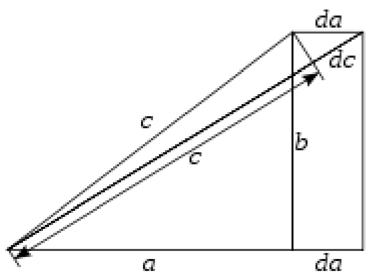


מעגל בעל רדיוס ρ חסום במשולש ABC.

שטח המשולש שווה לסכום שטחי המשולשים הצבעוניים: $\rho \cdot \frac{a}{2} + \rho \cdot \frac{b}{2} + \rho \cdot \frac{c}{2}$. מהשוואת נוסחה זו לנוסחה הרגילה לחישוב שטח משולש $\frac{ab}{2}$ מתקבל: $\rho = \frac{ab}{a+b+c}$. אורך הצלע c שווה ל $(\rho - b) + (\rho - a)$. לאחר העברת אגפים מתקבל: $\rho = \frac{a+b-c}{2}$

מהשוואת שני הביטויים שהתקבלו המייצגים את ρ מתקבל משפט פיתגורס.

שימוש בחשבון דיפרנציאלי



הוכחת המשפט באמצעות משוואות דיפרנציאליות.

בגישה זו, אורך אחד הניצבים *b* הוא קבוע ובודקים כיצד משתנה אורך היתר *c* בהתאם לשינוי באורך הניצב השני *a*, כפי שניתן לראות בדיאגראמה משמאל.

באמצעות דמיון משולשים מקבלים את המשוואה: $\frac{da}{dc} = \frac{c}{a}$.

ואחרי העברת אגפים, מתקבלת המשוואה הדיפרנציאלית: $c\,dc = a\,da$.

התרתה של משוואה זו (באמצעות אינטגרציה של שני האגפים) מביאה לפתרון:
$c^2 = a^2 + \mathrm{constant}$.

מכיוון שעבור המקרה שבו $a = 0$ מתקבל כי $c = b$, אזי הקבוע בפתרון הוא בדיוק b^2.
הצבתו של הקבוע במשוואה מביאה לתוצאה הדרושה: $c^2 = a^2 + b^2$.