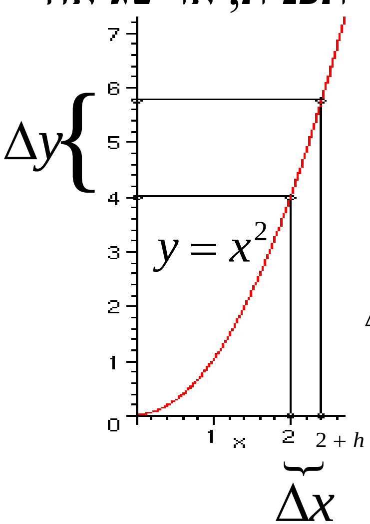
נגזרת של פונקציה-העשרה

- הנגזרת היא המושג החשוב בחשבון הדיפרנציאלי, ולה חשיבות מעשית רבה. היא מכמתת את קצב השינוי של תופעה כלשהי – פיסיקלית, כלכלית, וויזואלית. דוגמאות:
- מהירות של עצם היא קצב השינוי במקומו, ולכן המהירות היא הנגזרת של המקום. התאוצה היא הנגזרת של המהירות (או הנגזרת השניה של המקום).
- הנגזרת של ערכה של מניה היא קצב השינוי במניה.
- נגזרת של תמונה היא מדד לחדות שלה (תמונה מטושטשת משתנה לאט, לכן הנגזרות שלה קטנות). קיימות מערכות למיקוד אוטומטי של מצלמות המבוססות על תכונה זו.
- הנגזרת מאפשרת לגלות את הנקודה בה הפונקציה מקבלת ערך מינימלי. מאחר וכמעט כל בעיה במדעי המחשב ניתן לתרגם לבעיה של מזעור של פונקציה (למשל, זמן ריצה של תכנית, או שגיאה צפויה), ניתן לפתור בעיות רבות בעזרת נגזרות.



מהירות ממוצעת $=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

מהירות רגעית $=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

נניח שמקום של גוף בזמן t ניתן ע"י t^2 (למשל, 3 שניות אחרי שהגוף מתחיל לנוע, הוא נמצא 9 מטר מנקודת המוצא). נרצה לחשב את <u>המהירות הרגעית</u> בזמן $t=2$. ניתן לחשב אותה כגבול של המהירות הממוצעת בקטע הזמן $[2,2+h]$ כאשר $h\to 0$. למשל, אם $h=0.1$, המהירות הממוצעת היא $\dfrac{2.1^2-2^2}{0.1}=4.1$, ובאופן כללי:

$$\frac{(2+h)^2-2^2}{h}=4+h\xrightarrow[h\to 0]{}4.$$

- זה מוביל באופן טבעי להגדרת הנגזרת של $f(x)$ בנקודה x_0: $f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.
- למשל, הנגזרת של x^2 היא $2x$: $\lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h)^2-x_0^2}{h} = 2x_0$.
- לפונקציה $f(x)=\begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ אין נגזרת בנקודה $x_0=0$ (למרות שהיא רציפה ב - 0):

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h\sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\sin\left(\frac{1}{h}\right)$$

והגבול לא קיים.

- **<u>משפט</u>:** תהי $f(x)$ מוגדרת בסביבה מסוימת של x_0. אז $f(x)$ גזירה ב - x_0 אם"ם יש קבוע A ופונקציה $\alpha(\Delta x)$ המקיימת $\lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0$, $\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0) = A\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x$.

הוכחה: אם קיימת $\alpha(\Delta x)$ כזו, נחלק ב - Δx את שני האגפים ונקבל:

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = A+\alpha(\Delta x)\underset{\Delta x\to 0}{\rightarrow} A \Rightarrow$$ הנגזרת קיימת ושווה ל - A

כיוון שני: נניח שהנגזרת קיימת, נסמן $A=f'(x_0)$. נגדיר:

$$\alpha(\Delta x)=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}-A \Rightarrow \alpha(\Delta x)\underset{\Delta x\to 0}{\rightarrow} 0$$ ואז אם נכפול את שני האגפים ב - Δx

ונעביר את A אגף נקבל $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x$.

מסקנה מיידית: אם פונקציה גזירה בנקודה מסוימת, היא גם רציפה שם.

חשוב נגזרות

- דוגמאות: $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ גזירה ב – 0, $f(x)=|x|$ אינה גזירה ב – 0.
- **משפט:** אם $f(x), g(x)$ גזירות בנקודה x_0:

$$c\in R \Rightarrow (cf)'(x_0)=cf'(x_0)$$

$$(f(x)+g(x))'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$$

$$(f(x)g(x))'(x_0)=f(x_0)g'(x_0)+f'(x_0)g(x_0)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)} \Leftarrow g(x_0)\neq 0$$

הוכחה: נראה לגבי מכפלה.

$$(f(x)g(x))'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0+h)g(x_0)+f(x_0+h)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0+h)g(x_0)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}f(x_0+h)\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\lim_{h\to 0}g(x_0)=$$

$$=f(x_0)g'(x_0)+f'(x_0)g(x_0)$$

כלל השרשרת

- **משפט** (כלל השרשרת לגזירה של הרכבה של פונקציות): תהי $y=f(x)$ גזירה בנקודה $x=x_0$, ותהי $z=g(y)$ גזירה בנקודה $y=y_0=f(x_0)$. אזי הפונקציה המורכבת $z(x)=g(f(x))$ גזירה בנקודה x_0, ומתקיים $[g(f(x))]'(x_0)=g'(y_0)f'(x_0)$.

הוכחה: נסמן (לפי משפט קודם): $\left(\begin{array}{l}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\beta(\Delta x)=0\\ \lim\limits_{\Delta y\to 0}\alpha(\Delta y)=0\end{array}\right)$

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+\beta(\Delta x)\Delta x$$

$$\Delta z=g(y_0+\Delta y)-g(y_0)=g'(y_0)\Delta y+\alpha(\Delta y)\Delta y$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$$

ולכן: $\Delta z=g'(y_0)[f'(x_0)\Delta x+\beta(\Delta x)\Delta x]+\alpha(\Delta y)\Delta y$. נחלק ב – Δx :

$\frac{\Delta z}{\Delta x}=g'(y_0)[f'(x_0)+\beta(\Delta x)]+\alpha(\Delta y)\frac{\Delta y}{\Delta x}$. כאשר $\Delta x\to 0$ אז

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}\to f'(x_0),\beta(\Delta x)\to 0,\alpha(\Delta y)\to 0\ \Rightarrow\ \frac{\Delta z}{\Delta x}\to\boxed{g'(y_0)f'(x_0)}$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta x}\to\boxed{z'(x_0)=[g(f(x))]'(x_0)}$$

גבול הוא יחיד $\longleftrightarrow$ $\|$

דוגמא: $\sin'(x)=\cos(x),(x^8)'=8x^7\Rightarrow[\sin^8(x)]'=8\sin^7(x)\cos(x)$

- **משפט:** אם $y=f(x)$ הפיכה ורציפה בסביבה של x_0 ו- $f(x)$ גזירה ב- x_0 וכמו כן $f'(x_0)\neq 0$, אז הפונקציה ההפוכה $x=g(y)$ גזירה ב- $y_0=f(x_0)$ ו- $\boxed{g'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}}$.

דוגמאות של גזירה

$$\boxed{\sin(\alpha)-\sin(\beta)=2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$$

- הנגזרת של $\sin(x)$:

$$\sin'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\overbrace{2\sin\left(\frac{h}{2}\right)}^{\to 1}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h}=\cos(x)$$

- הנגזרת של e^x:

$$(e^x)'=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=e^x\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}}_{=1}=e^x$$

ממשפט קודם

- הנגזרת של $\arcsin(x)$: זוהי הפונקציה ההפוכה ל - $\sin(x)$ ולכן, אם $\sin(y)=x$, נובע מהמשפט על נגזרת של פונקציה הפוכה:

$$\arcsin'(x)=\frac{1}{\sin'(y)}=\frac{1}{\cos(y)}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- הנגזרת של x^n:

$$(x^n)'=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x^n+nhx^{n-1}+R_2)-x^n}{h}=$$

כאשר R_2 מכיל חזקות של h מסדר 2 ומעלה, ו R_1 – מכיל חזקות של h מסדר 1 ומעלה.

$$=\lim_{h\to 0}\frac{nhx^{n-1}+R_2}{h}=\lim_{h\to 0}(nx^{n-1}+R_1)=nx^{n-1}$$

טבלת נגזרות: ניתן לחשבן מהתוצאות בעמוד הקודם, ומחוקי הגזירה

$f(x)$	$f'(x)$
$[u(x)]^a$	$au'(x)[u(x)]^{a-1}$
$\sin[u(x)]$	$u'(x)\cos[u(x)]$
$\cos[u(x)]$	$-u'(x)\sin[u(x)]$
$\tan[u(x)]$	$\frac{u'(x)}{\cos^2[u(x)]}$
$\cot[u(x)]$	$\frac{-u'(x)}{\sin^2[u(x)]}$
$a^{u(x)}$	$u'(x)\ln(a)a^{u(x)}$

$f(x)$	$f'(x)$
e^x	e^x
$\ln[u(x)]$ $(\ln(x))$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$ $\left(\frac{1}{x}\right)$
$\arcsin[u(x)]$	$\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$
$\arccos[u(x)]$	$\frac{-u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$
$\arctan[u(x)]$	$\frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$
$\operatorname{arc}\cot[u(x)]$	$\frac{-u'(x)}{1+u^2(x)}$

- נגזרת של פונקציה מהצורה $f(x)^{g(x)}$:

נסמן $y=f(x)^{g(x)}$, ונשווה לוגריתמים בשני האגפים: $\ln(y)=g(x)\ln(f(x))$.

כעת נגזור את שני האגפים:

$$\frac{y'}{y}=g'(x)\ln(f(x))+\frac{g(x)f'(x)}{f(x)}\Rightarrow y'=\left[g'(x)\ln(f(x))+\frac{g(x)f'(x)}{f(x)}\right]y=$$

$$\left[g'(x)\ln(f(x))+\frac{g(x)f'(x)}{f(x)}\right]f(x)^{g(x)}$$

$$f(x)=\sin(x),g(x)=x^2\Rightarrow\left[\sin(x)^{x^2}\right]'=[2x\ln(\sin(x))+x^2\cot(x)]\sin(x)^{x^2}$$

כיוון אחר:

$$\left[f(x)^{g(x)}\right]'=\left[e^{\overbrace{g(x)\ln(f(x))}}\right]'\Rightarrow\left[e^{\overbrace{u(x)}}\right]'=u'(x)e^{u(x)}=\ldots$$

- נגזרת של <u>פונקציה סתומה</u>: ניתן להגדיר פונקציות באופן <u>סתום</u>, כלומר לא ע"י $y = f(x)$ אלא ע"י $g(x,y)=0$ (למשל מעגל מוגדר ע"י $x^2+y^2-1=0$). לא תמיד קל לחלץ את y כפונקציה של x , אולם גם אז ניתן לעיתים לחשב את הנגזרת. לדוגמא:

$$x^2\sin(y)+ye^x=0 \Rightarrow 2x\sin(y)+x^2\cos(y)y'+ye^x+e^xy'=0 \Rightarrow$$

$$y'=-\frac{2x\sin(y)+ye^x}{x^2\cos(y)+e^x}$$

למשל, הנקודה $(0,0)$ מקיימת את המשוואה הסתומה, והנגזרת בה שווה ל – 0.

- נגזרות חד-צדדיות: מוגדרות בדיוק כמו לגבי גבולות –

$$f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$$ נגזרת מימין

$$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$$ נגזרת משמאל

- <u>**משפט**</u>: הפונקציה גזירה בנקודה אם"ם הנגזרות מימין ומשמאל קיימות ושוות. למשל, ל - $f(x)=|x|$ יש ב- 0 נגזרת ימנית 1 ונגזרת שמאלית 1-, ולכן היא לא גזירה.

- אם קיימת הנגזרת, האם היא חייבת להיות רציפה? נסתכל בפונקציה

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

קל לראות שפונקציה זו גזירה ב – 0 והנגזרת שם = 0. אם $x\neq 0$, הנגזרת היא:

$$x\neq 0 \Rightarrow f'(x)=2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

כאשר $x\to 0$ אז $2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\to 0$
ול- $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ אין גבול, ולכן הגבול

$\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ אינו קיים, ולכן הנגזרת אינה רציפה ב – 0.

- במשפט קודם הוכחנו ש – $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0$, $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x$.

לכן, אם $A\neq 0$, אזי עבור Δx קטן, $(*)$ $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$. Δx מכונה לעיתים

<u>הדיפרנציאל</u>, ו - $(*)$ נקראת <u>הקירוב הליניארי</u> של $f(x)$ בנקודה x_0.

לדוגמא:
$$f(x)=\sqrt{x},\ f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow \sqrt{x+\Delta x}\approx\sqrt{x}+\frac{\Delta x}{2\sqrt{x}} \Rightarrow \sqrt{10}=\sqrt{9+1}\approx 3\tfrac{1}{6}$$

ואכן, $\left(3\tfrac{1}{6}\right)^2=10.02777...$.

המשפטים היסודיים של החשבון הדיפרנציאלי

- **משפט (Fermat):** תהי $f(x)$ פונקציה מוגדרת בקטע הפתוח (a,b) וגזירה בנקודה x_0 בקטע. אם $f(x)$ מקבלת ב - x_0 את ערכה הגדול ביותר או הקטן ביותר בקטע אז $f'(x_0)=0$.

הוכחה: נסתכל בנגזרת מימין (ששווה לנגזרת): $f'(x_0)=f'_+(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

נניח ש - $f(x)$ מקבלת את ערכה הגדול ביותר ב- x_0. אז המונה בגבול חייב להיות אי-חיובי עבור Δx קטן מספיק, ולכן הנגזרת חייבת להיות אי-חיובית. משיקולים זהים עבור הנגזרת משמאל, הנגזרת הינה אי-שלילית, ולכן היא חייבת להיות 0.

- **משפט (Rolle):** תהי $f(x)$ רציפה בקטע סגור $[a,b]$ וגזירה בקטע הפתוח (a,b). כמו כן נתון ש- $f(a)=f(b)$. אז יש נקודה $c\in(a,b),c$ כך ש – $f'(c)=0$.

הוכחה: לפי משפט קודם $f(x)$ מקבלת מקסימום ומינימום בקטע, נסמנם m,M. אם $m=M$ אז $f(x)$ קבועה בקטע ואז הנגזרת שווה זהותית ל- 0. אם $m<M$ אז M או m חייב להתקבל בתוך הקטע (כי הערכים בקצוות הקטע זהים), ואז ממשפט Fermat הנגזרת מתאפסת בתוך הקטע.

<u>דוגמא:</u> אם $f(x)=x^2$ אז $f(2)=f(-2)$ ולכן חייבת להיות נקודה בקטע $[-2,2]$ שבה הנגזרת מתאפסת, ואכן 0 היא נקודה כזו.

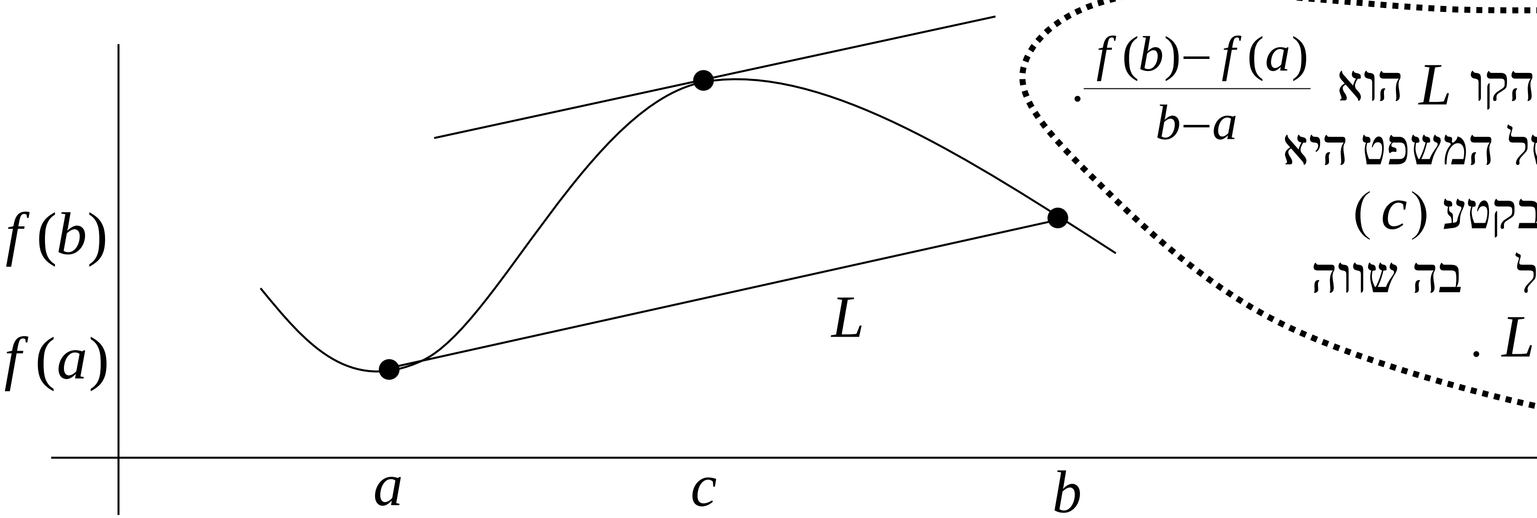
התנאי אינו "אם ורק אם". למשל, אם $f(x)=x^3$ אז $f'(0)=0$, אבל אין אף קטע $[a,b]$ המכיל את 0 כך ש - $f(a)=f(b)$.

- **<u>משפט הערך הממוצע של LaGrange</u> :** תהי $f(x)$ רציפה בקטע סגור $[a,b]$ וגזירה בקטע הפתוח (a,b). אז יש נקודה $c \in (a,b), c$ כך ש - $f^{'}(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

הוכחה: נבצע רדוקציה למשפט Rolle ע"י הפחתת הפונקציה הלינארית (קו ישר) המחברת את הנקודות $(a, f(a)),(b, f(b))$; התוצאה תהיה פונקציה המתאפסת ב - a,b ואז ניתן להפעיל את משפט Rolle.

$$F(x)=f(x)-\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\right] \Rightarrow F(a)=F(b)=0 \Rightarrow$$

$$\exists c, a<c<b, F^{'}(c)=0 \Rightarrow f^{'}(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad \left(F^{'}(c)=f^{'}(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)$$



השיפוע של הקו L הוא $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
המשמעות של המשפט היא
שיש נקודה בקטע (c)
שהשיפוע של   בה שווה
לשיפוע של L .

- דוגמא: $f(x)=x^3, a=1, b=2, \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=7=3\left(\sqrt{\frac{7}{3}}\right)^2 \Rightarrow c=\sqrt{\frac{7}{3}}\approx 1.527$

- דוגמא:

$$\forall a<b \quad \frac{\sin(b)-\sin(a)}{b-a}\overbrace{=}^{a<c<b}\cos(c)\Rightarrow|\sin(b)-\sin(a)|=|b-a||\cos(c)|\Rightarrow|\sin(b)-\sin(a)|\le|b-a|$$

- **<u>משפט</u>:** תהי $f(x)$ גזירה בסביבה מסוימת $(x_0-\delta, x_0+\delta)$. אזי לכל Δx קטן מספיק כך ש - $x_0+\Delta x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$, קיים θ ממשי, $0<\theta<1$, כך ש - $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x$.

הוכחה: נניח בלי הגבלת הכלליות ש - $\Delta x>0$. אם נפעיל את משפט LaGrange לקטע $[x_0, x_0+\Delta x]$, נקבל שיש נקודה c, $x_0<c<x_0+\Delta x \Rightarrow c=x_0+\theta\Delta x, 0<\theta<1$ כך ש -

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(c)\Rightarrow f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(c)\Delta x=f'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x$$

- **משפט הערך הממוצע של <u>Cauchy</u>:** יהיו $f(x), g(x)$ רציפות בקטע $[a,b]$ וגזירות בקטע (a,b). כמו כן נתון ש - $x\in(a,b)\Rightarrow g'(x)\neq 0$. אז קיימת c, $c\in(a,b)$ כך ש – $\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

הוכחה: דומה מאוד להוכחה של משפט הערך הממוצע של LaGrang .

- **משפט:** יהיו $f(x), g(x)$ גזירות בסביבת הנקודה x_0. אם $g'(x) \neq 0$ בסביבה זו, אזי לכל Δx קטן מספיק כך ש - $x_0 + \Delta x$ שייכת לסביבה הנתונה, קיים θ ממשי, $0 < \theta < 1$, כך ש – $\dfrac{f'(x_0 + \theta\Delta x)}{g'(x_0 + \theta\Delta x)} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}$. הוכחה: דומה מאוד להוכחה של משפט קודם.

- **משפט (כלל L'Hospital):** יהיו $f(x), g(x)$ פונקציות גזירות בסביבות הנקודה $x = a$, פרט אולי לנקודה a עצמה. נניח גם ש- $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, ש- $g'(x) \neq 0$ לכל $x \neq a$ בסביבות הנקודה a, ושהגבול $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ קיים. אז הגבול $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ קיים ושווה ל – $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

הוכחה: נובעת מיד מהמשפט הקודם:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - \overbrace{f(x_0)}^{0}}{g(x_0 + \Delta x) - \underbrace{g(x_0)}_{0}} = \frac{f(x_0 + \Delta x)}{g(x_0 + \Delta x)} = \frac{f'(x_0 + \theta\Delta x)}{g'(x_0 + \theta\Delta x)}$$

$$\downarrow \Delta x \to 0 \qquad\qquad \downarrow \Delta x \to 0$$

$$\frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

כלל **L'Hospital** נכון גם למקרים של גבול חד-צדדי, כאשר $x \to \pm\infty$, וכאשר $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$.

דוגמאות לשימוש בכלל L'Hospital

- לכלל **L'Hospital** חשיבות רבה בחשוב גבולות מהצורה $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}$. כמו כן, ניתן לחשב גבולות מהצורה $0\cdot\infty$ באופן הבא:

$$f(x)g(x),\ f(x)\to 0, g(x)\to\infty = \frac{f(x)}{\left(\frac{1}{g(x)}\right)},\ f(x)\to 0, \frac{1}{g(x)}\to 0$$

כלומר, תרגמנו גבול מהצורה $0\cdot\infty$ לצורה $\frac{0}{0}$. ניתן לבצע זאת גם לגבולות מהצורה 1^{∞}, ע"י חשוב הלוגריתם של הגבול:

$$\left[f(x)\to 1, g(x)\to\infty, f(x)^{g(x)}\to L\right] \Rightarrow \left[g(x)\ln[(f(x)]\to\ln(L)\right]$$

והגבול של $g(x)\ln[f(x)]$ הוא מהצורה $\infty\cdot 0$ (כי $\ln[f(x)]\to 0$).

דוגמאות:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{6x} = \frac{1}{6}$$

$$L = \lim_{x\to 0}[\cos(x)]^{\left(\frac{1}{x^2}\right)} \Rightarrow \ln(L) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln[\cos(x)]}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-\sin(x)}{\cos(x)}}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\sin(x)}{2x} = \frac{-1}{2} \Rightarrow L = e^{\left(\frac{-1}{2}\right)}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left[x\ln(x)\right]=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)}{\left(\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{-1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0$$

- דוגמאות בהן כלל **L'Hospital** <u>נכשל</u>, מאחר ולפחות אחד התנאים אינו מתקיים:

התנאי שאינו מתמלא הוא

קיום הגבול $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

אולם הגבול המקורי <u>כן קיים</u>

ושווה ל – 0, כי:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin(x)}\overset{?}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\cos(x)}=\text{לא קיים}$$

לגבול הצורה $\frac{0}{0}$ ולכן ננסה להפעיל את כלל **L'Hospital** ע"י גזירת מונה ומכנה

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin(x)}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x}{\sin(x)}\right]\lim_{x\to 0}\left[x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right]=1\cdot 0=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\text{הגבול המקורי!}$$

לגבול הצורה $\frac{\infty}{\infty}$ ולכן ננסה להפעיל את כלל **L'Hospital** ע"י גזירת מונה ומכנה

לגבול הצורה $\frac{\infty}{\infty}$ ולכן ננסה להפעיל את כלל **L'Hospital** ע"י גזירת מונה ומכנה

כלל **L'Hospital** נכשל אולם הגבול קיים ושווה ל- 1 כפי שקל לראות (חלקו מונה ומכנה ב - x).

משפטי Taylor ו - MacLaurin

- פולינומים הינם הפונקציות "הטובות ביותר". לכן, כדאי לנסות לקרב פונקציות <u>בעזרת</u> פולינומים, לפחות בתחום מוגבל (ברור, למשל, שלא ניתן לקרב את $\sin(x)$ על כל הישר ע"י פולינום, <u>אולם</u> ניתן לעשות זאת בכל קטע חסום).
- נדגים את משפט MacLaurin במקרה פרטי: תהי $f(x)$ פונקציה גזירה פעמיים בסביבות הנקודה $x=0$, ותהי x נקודה כלשהי בסביבה זו (נניח $x>0$). נגדיר:

$$g(t)=f(t)-[f(0)+f'(0)t]-\frac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{x^2}t^2$$

$$g(0)=f(0)-[f(0)+f'(0)\cdot 0]-\frac{f(x)-f(0)-f'(0)\cdot x}{x^2}\cdot 0^2=0$$

כאן x הוא קבוע; הפונקציה היא של t.

$$g'(0)=f'(0)-[0+f'(0)]-\frac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{x^2}\cdot 2\cdot 0=0$$

$$g(x)=f(x)-[f(0)+f'(0)x]-\frac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{x^2}x^2=0$$

ממשפט Rolle נובע שיש נקודה בין 0 ל - x בה $g'=0$, ומהפעלה נוספת של משפט Rolle נובע שיש נקודה c, $0<c<x$ כך ש - $g''(c)=0$.

$$g''(c)=f''(c)-2\frac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{x^2}=0\Rightarrow f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(c)}{2}x^2$$

וזהו משפט MacLaurin במקרה זה. באופן כללי, אם f גזירה $n+1$ פעמים בסביבות הנקודה a, ו - x נקודה כלשהי בסביבה זו, אזי קיימת נקודה c בין a ו - x כך ש -

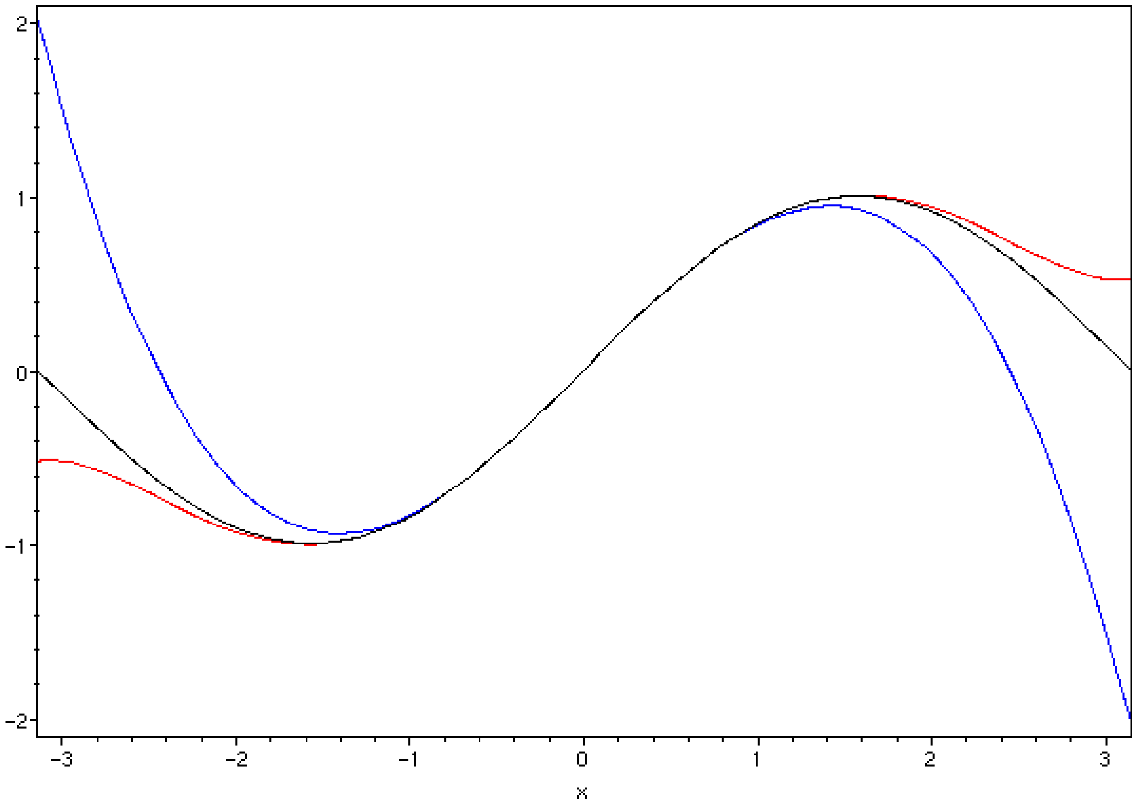
$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\overbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}^{R_n(x)}$$

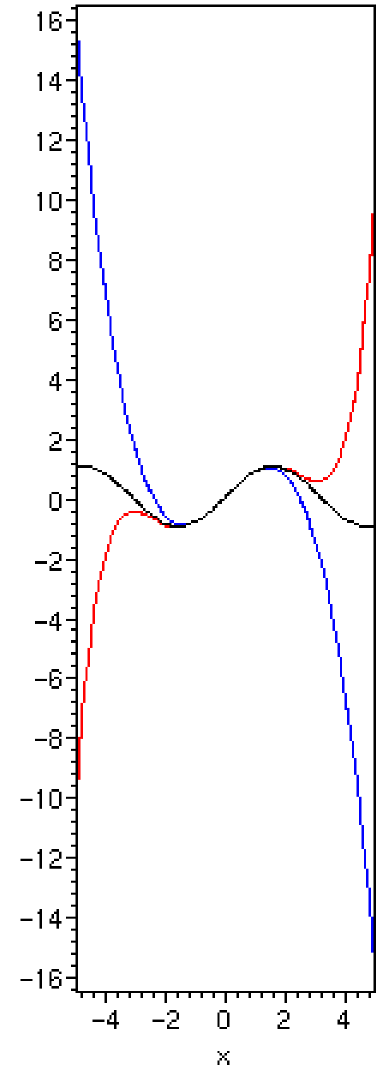
זהו משפט Taylor. $R_n(x)$ מכונה <u>השארית לפי LaGrange</u>, והיא מאפשרת <u>לחסום</u> את ההפרש בין $f(x)$ לפולינום המקרב, בתנאי שאפשר לחסום את $f^{(n+1)}(c)$. אם $a=0$ המשפט נקרא משפט MacLaurin. עבור $n=0$ זהו בעצם משפט הערך הממוצע של LaGrange .

דוגמאות:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+\frac{(-1)^{k-1}x^{2k-1}}{(2k-1)!}+\frac{(-1)^k\cos(c)}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$





$\sin(x)$ $\quad x-\frac{x^3}{3!}$ $\quad x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$

דוגמאות לפיתוח MacLaurin של $\sin(x)$.

חשוב גבולות בעזרת משפט MacLaurin

- ננסה לחשב את הגבול הבא:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^3}-1-x^3-\sin\left(\frac{x^6}{2}\right)}{x^9}=?$$

ניתן לחשב לפי L'Hospital, אולם זה עלול להיות קשה עקב מספר הגזירות הגדול. לפי הפיתוחים מהעמוד הקודם נובע:

$$\frac{e^{x^3}-1-x^3-\sin\left(\frac{x^6}{2}\right)}{x^9}=\frac{(1+x^3+\frac{x^6}{2}+\frac{x^9}{6}+\ldots)-1-x^3-\left(\frac{x^6}{2}-\frac{x^{18}}{48}+\ldots\right)}{x^9}\to\frac{1}{6}$$

כאשר "..." מסמל חזקות של x עם מעריך גדול מ – 9. חזקות אילו מתאפסות בשאיפה ל – 0.

משפט MacLaurin לא תמיד עוזר; למשל, לפונקציה הבאה כל הנגזרות ב $x=0$ – שוות ל – 0, לכן הפיתוח חסר משמעות:

$$f(x)=\begin{cases} e^{\left(\frac{-1}{x^2}\right)} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

שימוש בפיזיקה

- נחשב את האנרגיה הקינטית של עצם בעל מסה m הנע במהירות v (מהירות האור $= C$):

$$E = C^2\left(\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{C^2}}} - m\right) = \frac{mv^2}{2} + \frac{3mv^4}{8C^2} + \ldots$$

כפי שקל לראות מפיתוח
של MacLaurin
$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

כלומר, הנוסחה הקלאסית $E = \frac{mv^2}{2}$ אינה נכונה, אלא מהווה רק קירוב כאשר $v << C$.